

SOCIETA' NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LI/1 - ANNO CXXIII

(1984)



LIGUORI EDITORE

SOCIETA' NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LI/1 - ANNO CXXIII

(1984)



LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1984

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento totale o parziale sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, magnetico (compresi microfilm, microfiches e copie fotostatiche).

Prima edizione italiana Novembre 1984

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1990 1989 1988 1987 1986 1985 1984

Le cifre sulla destra indicano il numero, e l'anno dell'ultima ristampa

Printed in Italy, Liguori Editore, Napoli

ISBN 88 - 207 - 1360 - 8

INDICE

A. Polzonetti-Magni, L. Bellini-Cardellini, A. Gobetti, V. Botte - Ormoni sessuali plasmatici nell'anfibio anuro, <u>Rana Esculenta</u> complex, in accoppiamento	Pag. 9
G. Montagnaro - Su un sistema di equazioni integrali che traduce un problema di frontiera mobile a due fa- si	" 15
A. Bolognese, R. Maglione - Decomposizione fotochimica degli N-Ossidi della Trifenodiossazina	" 27
A. Bolognese, R. Liberatore, C. Piscitelli, G. Scherillo, U. Vettori - Struttura e proprietà degli Ommocromi. Ossu- dazione dell'estere metilico della 3-idrossichinu- renina	31
G. Chieffi, M.F. Caliendo, M. Milone - Modificazioni del- la malato deidrogenasi nell'ipotalamo di topo du- rante lo sviluppo	37
G. Frigione - Utilizzazione di loppa d'altoforno per la produzione di Clinker Portland	49
A. Basile - Su un teorema di decomposizione alla Lebesgue per topologie su anelli di insiemi	61
G. Chieffi, M.F. Caliendo - Profilo ontogenetico della glu- cosio-6-fosfato deidrogenasi nell'ipotalamo di topo	67
L. D'Apuzzo - Sulla questione della attrazione negli spazi metrici	81
C. F. Xaasan, L. Minale, M. Bashir, M. Hussein, E. Finamo re - Triterpenes of Boswellia Carterii	93
M.A. Puglisi - Misurabilità e spazi-KD di funzioni vetto- riali	97
V. Esposito - Su alcune equazioni ellittico paraboliche degeneri del IV ordine	117
G. Frigione - Properties of Portland Slag Cements	129

ORMONI SESSUALI PLASMATICI NELL'ANFIBIO ANURO, RANA ESCULENTA
COMPLEX, IN ACCOPPIAMENTO*.

Nota di ⁺Polzonetti-Magni A., ⁺Bellini-Cardellini L., ⁺Gobbetti A., ⁺⁺Botte V.

Presentata dal Socio Ordinario G. Chieffi.

Adunanza del 23/7/83.

Riassunto.

Sono stati valutati i livelli ematici di alcuni ormoni sessuali in Rana esculenta in fase di accoppiamento. Sono state effettuate le catture e i prelievi in situ in una popolazione delimitata, vivente nella palude di Colfiorito (Umbria). I risultati mostrano come il tempo della cattura è un fattore critico dal momento che i livelli di progesterone, estradiolo ed androgeni in maschi e femmine sono più alti di quelli osservati nella stessa popolazione e nella stessa fase del ciclo riproduttivo, ma con prelievi effettuati dopo alcune ore dalla cattura. I livelli degli ormoni studiati sono risultati significativamente più elevati nelle femmine che nei maschi. Inoltre non è stato possibile mettere in evidenza alcuna correlazione positiva o negativa tra il livello degli ormoni circolanti e il peso delle gonadi o dei caratteri sessuali secondari; ad eccezione di una correlazione, se pur non abbastanza significativa, tra i livelli di estradiolo e il peso dell'ovidutto.

Abstract.

Plasmatic sex hormones in Rana esculenta during the spawning period were studied. The animals were captured in a mountain pond (Colfiorito, Umbria) and the blood samples were obtained in the field as soon as possible after capture. The results show that the time of the capture is a critical factor since the titre of progesterone, estradiol and androgens in both sexes is much higher than those observed in the same animals and in the same period, sampled and bled 6-7 hours from capture. The general elevation of hormone levels in the females as compared to the males was observed. Furthermore, levels of plasma steroids did not show any positive or negative correlation with the weight of gonads and secondary sexual characters, with exception of the positive correlation showed by estradiol levels and oviduct weight.

* Lavoro eseguito con un contributo del MPI assegnato ai Professori Polzonetti-Magni e Botte.

+ Dipartimento di Biologia Cellulare, Università di Camerino, Camerino (ITALY).

++ Istituto e Museo di Zoologia, Università di Napoli, Napoli (ITALY).

Negli anfibi anuri, caratteristiche modificazioni nei livelli di ormoni sessuali circolanti si verificano nelle varie fasi del ciclo sessuale. Volendo considerare il periodo riproduttivo che, a seconda delle caratteristiche climatiche dell'ambiente, si realizza da marzo a maggio è abbastanza comune un aumento degli estrogeni e del progesterone ed un progressivo decremento del testosterone. Esistono però delle differenze talvolta notevoli ed inesplicabili anche in popolazioni differenti della stessa specie. Così in femmine di Rana esculenta viventi in palude di montagna (Colfiorito, Umbria) e in una laguna (Lesina, Puglia) durante il periodo di riproduzione Polzonetti-Magni et al. (in press) hanno trovato la presenza di estradiolo non evidenziata nelle zone dei dintorni di Napoli (D'Istria et al., 1978).

Limite notevole nell'attendibilità dei dosaggi ormonali in questi anuri è data dalla rapida alterazione nei livelli degli ormoni circolanti a seguito della cattura e della cattività (Polzonetti-Magni et al. 1970, Licht et al. 1983). Questi aspetti, peraltro già da noi osservati in Rana esculenta, sono stati di recente ribaditi per Rana catesbeiana nella quale già qualche ora dalla cattura si osserva un significativo decremento nelle gonadotropine e negli ormoni sessuali circolanti (Licht et al. 1983).

E' ovvio che una corretta interpretazione ai fini anche fisiologici delle determinazioni ormonali deve tener conto di simili fenomeni. D'altro canto indagini su fasi critiche e di breve durata della riproduzione, come il periodo ovulatorio, richiedono prelievi rapidi e su animali in accoppiamento perché possano il più possibile rispecchiare la sequenza degli eventi endocrini preposti alla regolazione di tale funzione.

In questo quadro, avendo la possibilità di seguire una piccola popolazione di rane vivente nella palude di Colfiorito (Umbria), abbiamo ritenuto utile valutare i livelli ematici di alcuni ormoni sessuali in animali in fase di accoppiamento e perciò estremamente prossimi al periodo dell'ovulazione.

Materiali e Metodi.

Il presente studio è stato condotto su 9 coppie di Rana esculenta catturate il 10 maggio 1983 nella palude di Colfiorito posta a 750 m sul livello del mare (Umbria). In questa località nostre precedenti indagini hanno mostrato che le rane si riproducono verso la metà di maggio e le femmine ovulano una sola volta nel corso della stagione riproduttiva che è molto breve (Polzonetti-Magni et al. in press). La palude di Colfiorito e le zone circostanti appartengono ad un esteso altopiano il cui clima può essere definito di tipo continentale (Pedrotti, 1981).

Gli animali sono stati sacrificati sul posto; tra la cattura e il prelievo del sangue non trascorrevano mai più di 1-2 ore. Da ogni rana, dopo anestesia in MS 222 Sandoz, si prelevava il sangue con capillari eparinizzati e nel

le femmine, l'ovario e l'ovidutto; nel maschio, il testicolo e la callosità del pollice. Questi tessuti erano opportunamente pesati. Il sangue era centrifugato ed il plasma risultante conservato a -20°C per poi essere analizzato in laboratorio. Il dosaggio degli ormoni sessuali era condotto secondo la tecnica precedentemente riportata ed adattata a questo anfibio (D'Istria et al. 1974; Polzonetti-Magni et al. in press.). Questi risultati numerici erano sottoposti ad analisi statistiche (ANOVA, regressione lineare).

Risultati.

Nella Tabella 1 sono riportati analiticamente i risultati ottenuti sulle 9 coppie oggetto di esame. Come appare dai pesi dell'ovario e dell'ovidutto, in 8 di esse la femmina era in fase preovulatoria ed in uno (l'ottava) in ovulazione (all'autopsia presentava uova nell'ovidutto).

L'analisi dei risultati, relativamente alle concentrazioni degli ormoni mostra che:

- 1- il livello del progesterone è risultato più alto nei dosaggi attuali che in quelli fatti in precedenti anni sulla stessa specie, ma esaminata a 6-7 ore dalla cattura (maschi: attuale ng $1,1 \pm 0,3$, precedente ng $0,46 \pm 0,07$; femmine: attuale ng $2,03 \pm 0,53$, precedente ng $1,79 \pm 0,21$). Come precedentemente osservato, le femmine presentano un livello plasmatico di progesterone più alto che nei maschi (nel caso attuale $P < 0,05$).
- 2- Anche i livelli di estradiolo presentano lo stesso fenomeno ma in modo più eclatante (maschi: attuale ng $1,36 \pm 0,22$, precedente ng $0,28 \pm 0,06$; femmine: attuale ng $3,99 \pm 0,84$, precedente ng $0,87 \pm 0,09$). Di nuovo appare evidente che i livelli ormonali sono più alti nella femmina che nel maschio (nel caso attuale $P < 0,01$).
- 3- I livelli degli androgeni sono più alti che nelle precedenti osservazioni anche se specialmente nelle femmine la differenza non appare significativa (maschi: attuali ng $13,95 \pm 4,12$, precedente ng $8,57 \pm 0,75$; femmine: attuale ng $19,12 \pm 3,09$, precedente ng $8,74 \pm 1,08$). In questi dosaggi la quantità di androgeni circolanti è risultata più alta nelle femmine, tuttavia, causa la grande variabilità la differenza non risulta statisticamente significativa. Va notato che nei maschi delle coppie 6 e 7 hanno più androgeni che le rispettive femmine. Il maschio 6 ha un valore di gran lunga superiore a quello di tutti gli altri.
- 4- L'analisi statistica dei dati (regressione lineare) volta a stabilire una correlazione tra i vari parametri ha portato alle seguenti osservazioni. Il peso del testicolo e della callosità non è mai significativamente correlato ai livelli dei diversi ormoni. Anche questi ultimi, tra loro, non sono correlati. Nelle femmine i risultati sono, nel complesso, analoghi per

quanto riguarda la relazione tra peso ovarico e ormoni circolanti. Per l'ovidutto invece si osserva una correlazione positiva, anche se non altamente significativa ($r = 0,70$), tra il peso dell'organo e la concentrazione di estrogeni.

Tabella 1 - Livelli plasmatici degli ormoni sessuali in coppie di Rana esculenta, catturate durante il periodo ovulatorio (10 maggio 1983) nella palude di Colfiorito (Umbria).

Coppie	peso gonade (in g.)	peso call. pollice (in mg)	peso ovidutto (in g.)	ormoni sessuali (in ng/ml plasma)		
				progesterone	estradiolo	androgeni
1	♂	0,052	130	1,40	2,800	19,35
	♀	6,770		2,35	5,50	9,800
2	♂	0,082	173	0,82	1,200	3,87
	♀	8,420		3,70	2,30	6,100
3	♂	0,087	170	0,62	0,666	7,04
	♀	7,940		2,94	1,00	2,240
4	♂	0,075	206	0,46	0,520	7,74
	♀	6,970		3,05	1,36	3,000
5	♂	0,081	180	0,72	1,125	9,67
	♀	7,690		2,89	3,65	2,800
6	♂	0,077	138	3,70	1,800	40,00
	♀	8,450		2,93	2,00	3,600
7	♂	0,073	179	0,68	1,360	16,00
	♀	8,350		2,57	0,80	2,400
8	♂	0,068	112	0,40	1,600	8,00
	♀	0,800*		0,12	1,10	4,000
9	♂	0,047	85	nd**	1,200	nd**
	♀	7,700		3,12	0,60	1,966
* ♂		0,071	153	1,10	1,363	13,95
		+0,005		+ 13	+0,36	+0,224
* ♀		7,010		2,63	3,983	19,12
		+0,802		+0,34	+0,54	+0,837

* medie \pm ES

* animale con uova nell'ovidutto

** non dosato

Discussione.

Lo scopo di questa indagine è stata primariamente quello di avere dei parametri ormonali attendibili relativi alla fase periovulatoria in Rana esculenta. Ciò è stato possibile operando delle catture e dei prelievi in situ in una popolazione delimitata vivente nella palude di Colfiorito. I risultati mostrano come effettivamente il tempo della cattura è un fattore critico poiché, come appare dalla tabella 1, i livelli ormonali sono tutti più alti di quelli osservati

nella stessa popolazione e nella stessa fase del ciclo riproduttivo, ma con prelievi effettuati dopo alcune ore dalla cattura. Ciò convalida pienamente quanto osservato di recente da Licht et al. (1983) in Rana catesbeiana. Alcuni dati riportati da questi autori trovano conferma nelle nostre indagini. Per esempio, come in Rana catesbeiana, non è stato possibile mettere in evidenza alcuna correlazione positiva o negativa, tra livelli degli ormoni circolanti e il peso delle gonadi o dei caratteri sessuali secondari (ovidutto nelle femmine, callosità nel maschio). Va notato però che una correlazione anche se non altamente significativa ($r=0,70$) esiste tra i livelli di estradiolo e il peso dell'ovidutto. Ciò differisce da quanto riportato in Rana catesbeiana nella quale tale correlazione si stabilisce con il testosterone; questo fenomeno non è stato da noi riscontrato.

Per il resto i nostri dati convalidano precedenti osservazioni sulla stessa popolazione e che sembrano essere comuni ad altre popolazioni e ad altri anfibi anuri. Basterà ricordare i livelli più alti di testosterone ed estrogeni nelle femmine rispetto ai maschi e il collegamento dell'incremento del progesterone con il periodo ovulatorio (Polzonetti-Magni et al., in press, Thornton, 1972).

In conclusione, i dati riferiti in questa nota ribadiscono ancora una volta la necessità di operare negli anuri prelievi di sangue rapidi, appena dopo la cattura, se si vogliono ottenere dei parametri ormonali attendibili. L'implicazione di questo aspetto nel ciclo potrà ulteriormente precisare l'importanza delle sia pur brevi cattività sulle fluttuazioni cicliche degli ormoni.

Bibliografia.

- D'ISTRIA M., DELRIO G., BOTTE V. and CHIEFFI G., (1974). Radioimmunoassay of testosterone, 17β -estradiol and estrone in the male and female plasma of Rana esculenta during sexual cycle.
STEROIDS AND LIPIDS RESEARCH : 5, 42-48.
- D'ISTRIA M., CITARELLA F., DELRIO G., (1978). Radioimmunoassay of plasma estriol in males and females of Rana esculenta.
REND. ACAD. NAZ. LINCEI : 64, 315-317.
- LICHT P., MCCREERY B.R., BARNES R. and PANG R. (1983). Seasonal and stress related changes in plasma gonadotropins, sex steroids, and corticosterone in the bull frog, Rana catesbeiana.
GEN. COMP. ENDOCRINOL. : 50, 124-145.
- PEDROTTI F. (1981). La palude di Colfiorito e il piano di Ricciano.
UMBRIA ECONOMICA : 3, 27-32.
- POLZONETTI-MAGNI A., LUPO-DI PRISCO C., RASTOGI K.K., BELLINI-CARDELLINI L. and CHIEFFI G. (1970). Estrogens in the plasma of females of Rana esculenta du-

ring the annual cycle and following ovariectomy.

GEN. COMP. ENDOCRINOL.: 14, 212-213.

POLZONETTI-MAGNI, A., BOTTE V., BELLINI-CARDELLINI L., GOBETTI A., CRASO A.

Plasma sex hormones and post-reproductive period in the green frog Rana
esculenta complex.

GEN. COMP. ENDOCRINOL. (in press).

THORNTON V.F. (1972). A progesterone-like factor detected by bioassay in the
blood of the toad Bufo bufo shortly before induced ovulation.

GEN. COMP. ENDOCRINOL.: 18, 133-139.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblica
zione da una commissione composta dai soci G. Chief-
fi, M. De Vincentis, G. Ghiara.

Su un sistema di equazioni integrali

che traduce

un problema di frontiera mobile a due fasi. (*)

Nota di G. MONTAGNARO (Napoli) (**)

Presentata dal Socio Ordinario Carlo Ciliberto
(Adunanza del 7/1/1984)

Riassunto - Si studia un sistema di equazioni integrali che traduce un problema di frontiera mobile a due fasi tratto da studi di Ingegneria dei polimeri e si estendono i risultati già stabiliti per l'analogo sistema corrispondente al problema ad una fase.

Summary - We consider an integral system arising a two-phase moving boundary problem from Polymer Engineering and we extend the theorems previously stated for the one-phase problem.

In un recente lavoro in collaborazione con BRUNO [3] sono stati stabiliti teoremi di unicità, approssimazione, esistenza e unicità per un problema di frontiera mobile ad una fase in cui il fronte è una linea di discontinuità, tratto da ricerche sul comportamento dei polimeri in presenza di solventi a basso peso molecolare ([1], [2]). L'analisi svolta è basata sullo studio di un sistema di equazioni integrali equivalente al problema, nell'ordine di idee di RUBINSTEIN e FRIEDMAN (Cfr. [4]). Quando si considera il corrispondente problema a due fasi (Cfr. n.1), ugualmente è possibile ricondursi ad un sistema di equazioni integrali; in questa nota si studia appunto tale sistema, estendendo, in una forma più generale, i risultati stabiliti per il precedente (Cfr. n.2).

Nell'applicazione al problema chimico rimane non risolta la questione di stabilire, in opportune condizioni sui dati, (naturali) limitazioni a priori per la componente relativa alla "fase gommosa" (le analoghe in [3] invece sono immediatamente deducibili usando il principio del massimo); ciò condiziona il problema dell'esistenza in grande, anche se, in base ai risultati stabiliti per il sistema integrale, si può comunque formulare un contributo in tal senso (Cfr. teorema 2.5), che sembra utile anche ai fini applicativi.

Problemi di frontiera libera simili a quello qui trattato in relazione alla presenza di discontinuità attraverso il fronte mobile sono stati studiati da HILL e KOTLOW [5] e da SISKIN ([6], [7], [8]); essi sostanzialmente differiscono per la (4) (Cfr. n.1) che è sostituita da una condizione del tipo $u_x = \alpha u$; in [6] è adoperata la tecnica di RUBINSTEIN e FRIEDMAN.

Si coglie l'occasione per segnalare qualche imperfezione contenuta in [3] (Cfr. le note ²) e ³)).

(*) Lavoro eseguito con fondi erogati dal Ministero della Pubblica Istruzione.

(**) Istituto di Matematica della Facoltà di Ingegneria.

1 - Il problema (P) ed il sistema integrale (S) ad esso equivalente.

Problema (P):

- (1) $u_{xx} - u_t = 0$ in $\omega = \{t > 0, 0 < x < s(t)\}$
 (2) $u(x, 0) = \varphi(x)$ $x \in (0, b), b = s(0) > 0$
 (3) $u(0, t) = 1$ $t \in (0, +\infty)$
 (4) $\dot{s}(t) = f(u(s(t), t))$ $t \in (0, +\infty)$
 (1') $\gamma^2 U_{xx} - U_t = 0$ in $\Omega = \{t > 0, x > s(t)\}$
 (2') $U(x, 0) = \Phi(x)$ $x > b$
 (3') $U(x, t)$ è limitata per $x \rightarrow +\infty$, uniformemente rispetto a $t \in (0, T), \forall T$
 (4') $U(s(t), t) = 0$ $t > 0$
 (5) $u_x(s(t), t) + \dot{s}(t)(u(s(t), t) + q) = \gamma^2 U_x(s(t), t)$ $t > 0,$

ove q e γ sono costanti, $\gamma \neq 0$.

Supponiamo che risulti:

$$(1.1) \quad \varphi \in C^0[0, b], \quad \Phi \in C^1[b, +\infty), \quad \Phi' \in L_\infty(b, +\infty), \quad \Phi(b) = 0, \quad f \in C^0(R)$$

e consideriamo la seguente classe funzionale, Γ , per (s, u, U) :

$$(1.2) \quad s \in C^1[0, +\infty)$$

$$(1.3) \quad \left(\begin{array}{l} u \in C^{2,1}(\omega) \cap C^0(\bar{\omega} - \{0\}) \cap C^{1,0}(\omega \cup \{(0, t) : t > 0\}) \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(P), \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_x(P) \in \mathcal{J}[\varphi(0), 1] \end{array} \right)_1$$

$$(1.4) \quad u_x \text{ è continua fino su } x = s(t) \text{ per } t > 0, \text{ convergente in } (b, 0) \text{ lungo } x = s(t)$$

$$(1.3') \quad \left(\begin{array}{l} U \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega}) \\ U \text{ è limitata per } x \rightarrow +\infty, \text{ uniformemente rispetto a } t \in (0, T), \forall T. \end{array} \right)$$

Orbene, indichiamo con g la funzione di GREEN per il semipiano $x > 0$ relativa all'operatore $\partial_{xx} - \partial_t$ e con n la corrispondente funzione di NEUMANN; posto:

$$k(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}(t-\tau)\sqrt{2}} \exp \frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)},$$

¹⁾ $C^{h,k}(A)$ denota l'insieme delle funzioni dotate di derivate continue, in A , rispetto a x fino all'ordine h e rispetto a t fino all'ordine k ; $\mathcal{J}[a, \beta]$ denota l'intervallo $[\min\{a, \beta\}, \max\{a, \beta\}]$.

risulta:

$$g(x, t, \xi, \tau) = k(x, t, \xi, \tau) - k(-x, t, \xi, \tau)$$

$$n(x, t, \xi, \tau) = k(x, t, \xi, \tau) + k(-x, t, \xi, \tau) ;$$

similmente, in riferimento all'operatore $\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x x} - \frac{\partial}{\partial t}$, poniamo:

$$K(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{\gamma} k\left(\frac{x}{\gamma}, t, \frac{\xi}{\gamma}, \tau\right).$$

Sia allora (s, u, U) soluzione del problema (P) nella classe suddetta; $V(x, t)$ in ω ed in Ω , integrando rispettivamente su $\{(\xi, \tau): \varepsilon < \xi < s(t), \varepsilon < \tau < t - \varepsilon\}$ e su $\{(\xi, \tau): \xi > s(t), \varepsilon < \tau < t - \varepsilon\}$ l'identità di GREEN relativa ai suddetti operatori e ad (u, g) e (U, K) , per $\varepsilon \rightarrow 0$, tenendo conto di noti risultati sui potenziali termici, con la posizione:

$$v(t) = u(s(t), t) \quad , \quad V(t) = U_{\xi}(s(t), t)$$

si ha, rispettivamente in ω e Ω :

$$(1.5) \quad u(x, t) = \int_0^t g(x, t, s(\tau), \tau) (\gamma^2 V(\tau) - s'(\tau) q) d\tau - \\ - \int_0^t g_{\xi}(x, t, s(\tau), \tau) v(\tau) d\tau + \int_0^t g_{\xi}(x, t, 0, \tau) d\tau + \int_0^b g(x, t, \xi, 0) \Phi(\xi) d\xi ,$$

$$(1.5') \quad U(x, t) = -\gamma^2 \int_0^t K(x, t, s(\tau), \tau) V(\tau) d\tau + \int_b^{+\infty} K(x, t, \xi, 0) \Phi(\xi) d\xi ,$$

da cui, derivando rispetto a x e tenendo conto che $\Phi(b) = 0$, si deduce:

$$U_x(x, t) = -\gamma^2 \int_0^t K_x(x, t, s(\tau), \tau) V(\tau) d\tau + \int_b^{+\infty} K(x, t, \xi, 0) \Phi'(\xi) d\xi ;$$

in definitiva risulta:

$$(1.6) \quad v(t) = 2 \left\{ \int_0^t g(s(t), t, s(\tau), \tau) (\gamma^2 V(\tau) - s'(\tau) q) d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^t g_{\xi}(s(t), t, s(\tau), \tau) v(\tau) d\tau + \int_0^t g_{\xi}(s(t), t, 0, \tau) d\tau + \int_0^b g(s(t), t, \xi, 0) \Phi(\xi) d\xi \right\}$$

$$(1.6') \quad V(t) =$$

$$= 2 \left\{ -\gamma^2 \int_0^t K_x(s(t), t, s(\tau), \tau) V(\tau) d\tau + \int_b^{+\infty} K(s(t), t, \xi, 0) \Phi'(\xi) d\xi \right\}$$

$$(1.7) \quad s(t) = b + \int_0^t f(v(\tau)) d\tau.$$

Le (1.6)-(1.6')-(1.7) definiscono un sistema di equazioni integrali, (S), nell'incognita (s,v,V), che in opportune classi funzionali è equivalente al problema (P), nel senso precisato dalle seguenti proposizioni:

1.1 - Nelle condizioni (1.1), se (s,v,V) è una soluzione del sistema (S), con v e V in $C^0[0, +\infty)$, allora la terna (s,u,U), con u e U definite dalle (1.5) e (1.5'), è di classe (1.2)-(1.3)-(1.3') e verifica le (1), ..., (4'); se poi u ha la regolarità (1.4), vale anche la (5) e dunque (s,u,U) è soluzione del problema (P) di classe Γ .

Poniamoci ora nelle seguenti condizioni:

$$(1.8) \quad \left(\begin{array}{l} \varphi \in C^2[0, b] \quad , \quad \Phi \in C^3[b, +\infty) \quad , \quad \Phi''' \in L_{\infty}(b, +\infty) \quad , \quad f \in C^1(R) \\ \varphi(0) = 1 \quad , \quad \Phi(b) = 0 \quad , \\ \varphi'(b) + f(\varphi(b))(\varphi(b) + q) = \gamma^2 \Phi'(b) \quad , \quad \Phi'(b) \dot{s}(0) + \gamma^2 \Phi''(b) = 0 \end{array} \right)$$

e consideriamo la classe funzionale, Γ^* , definita dalle proprietà:

$$(1.9) \quad s \in C^2[0, +\infty)$$

$$(1.10) \quad u \in C^{2,1}(\omega) \cap C^{1,0}(\bar{\omega}) \cap C^{2,0}(\bar{\omega} - \{0\})$$

$$(1.10') \quad \left(\begin{array}{l} U \in C^{3,1}(\bar{\Omega}) \\ U_{x_j} \text{ è limitata per } x \rightarrow +\infty \text{ uniformemente rispetto a } t \in (0, T), \quad \forall T. \end{array} \right)$$

È evidente che, se (s,u,U) è soluzione di classe Γ^* del problema (P), allora $u(s(t), t)$ e $U_x(s(t), t)$ sono di classe $C^1[0, +\infty)$; ma si ha pure:

1.2 - Nelle condizioni (1.8), se (s,v,V) è soluzione del sistema (S), con v e V di classe $C^1[0, +\infty)$, allora (s,u,U), con u e U definite dalle (1.5) e (1.5'), è soluzione del problema (P) di classe Γ^* .

Le proposizioni precedenti si giustificano con ragionamenti del tutto analoghi a quelli svolti in [3] e che pertanto non esplicitiamo; riportiamo invece lo schema delle valutazioni asintotiche intorno ad 0 ed a (b,0) mediante le quali si stabiliscono quelle relative ad u ed U, ed anche le rappresentazioni di u_{x_i} (i=1,2) e di U_{x_j} (j=2,3) conseguenti alle condizioni poste sui dati.

Indichiamo con $\chi(\xi)$ e $\psi(\tau)$ funzioni di classe $C^0[0, b]$ o $C^0[b, +\infty) \cap L_{\infty}(b, +\infty)$ e $C^1[0, +\infty)$ rispettivamente: intorno a 0 si ha:

$$\int_0^b k(\pm x, t, \xi, 0) \chi(\xi) d\xi = o(1) + \chi(0) \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz \right\};$$

ed intorno a $(b, 0)$:

$$\int_0^b k(x, t, \xi, 0) \chi(\xi) d\xi = o(1) + \chi(b) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(b-x)/2\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz \right\}$$

$$\int_0^t k_\xi(x, t, s(\tau), \tau) \psi(\tau) d\tau = o(1) + \psi(0) \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(b-x)/2\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz \right\}$$

$$\int_0^t K_\xi(x, t, s(\tau), \tau) \psi(\tau) d\tau = o(1) + \frac{\psi(0)}{\gamma^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-b)/2\gamma\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz \right\}$$

$$\int_b^{+\infty} K(x, t, \xi, 0) \chi(\xi) d\xi = o(1) + \chi(b) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_b^{(x-b)/2\gamma\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz \right\}.$$

Supponendo (s, v, V) soluzione del sistema (S) con v e V di classe C^1 , per le funzioni u e U date dalle (1.5) e (1.5'), nelle condizioni (1.8), si ha:

$$u_x(x, t) = \int_0^t n(x, t, s(\tau), \tau) \dot{v}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t n_\xi(x, t, s(\tau), \tau) \{ \dot{s}(\tau)(v(\tau)+q) - \gamma^2 V(\tau) \} d\tau + \int_0^b n(x, t, \xi, 0) \varphi'(\xi) d\xi,$$

avendo tenuto conto che $\varphi(0)=1$ e $v(0)=\varphi(b)$;

$$u_{x^2}(x, t) = - \int_0^t g_\xi(x, t, s(\tau), \tau) \{ \dot{v}(\tau) + \dot{s}^2(\tau)(v(\tau)+q) - \gamma^2 V(\tau) \} \dot{s}(\tau) d\tau +$$

$$- \int_0^t g(x, t, s(\tau), \tau) \{ \dot{s}(\tau) \dot{v}(\tau) + \dot{s}^2(\tau)(v(\tau)+q) - \gamma^2 \dot{V}(\tau) \} d\tau + \int_0^b g(x, t, \xi, 0) \varphi''(\xi) d\xi,$$

ove si è utilizzata la condizione $\varphi'(b) + f(\varphi(b))(\varphi(b)+q) = \gamma^2 \Phi'(b)$;

$$U_{x^2}(x, t) =$$

$$= - \int_0^t K(x, t, s(\tau), \tau) \dot{V}(\tau) d\tau - \int_0^t K_\xi(x, t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) V(\tau) d\tau + \int_b^{+\infty} K(x, t, \xi, 0) \Phi''(\xi) d\xi,$$

ricordando che $V(0)=\Phi'(b)$;

$$U_{x^3}(x, t) = \int_0^t K_\xi(x, t, s(\tau), \tau) \{ \dot{V}(\tau) + \frac{1}{\gamma^2} \dot{s}^2(\tau) V(\tau) \} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\gamma^2} \int_0^t K(x, t, s(\tau), \tau) \{ \dot{s}(\tau) V(\tau) + s(\tau) \dot{V}(\tau) \} d\tau + \int_b^{+\infty} K(x, t, \xi, 0) \Phi'''(\xi) d\xi,$$

ove si è tenuto conto che $\Phi'(b)s'(0) + \gamma^2 \Phi''(b) = 0$.

Dalle relazioni di sopra si deducono tutte le proprietà descritte nella 1.2; si ha inoltre la seguente valutazione asintotica intorno a 0:

$$u_{x^2}(x, t) = o(1) + \varphi''(0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} \exp(-z^2) dz.$$

2 - Studio del sistema (S) ed applicazioni al problema (P).

Indichiamo, per ogni coppia di funzioni (v, V) , con w e W le funzioni definite ordinatamente dai secondi membri delle (1.6) e (1.6') mediante la (1.7); consideriamo quindi la trasformazione funzionale:

$$\mathfrak{T}: (v, V) \rightarrow (w, W)$$

i cui elementi uniti evidentemente determinano soluzioni del sistema (S). Sussistono le proposizioni:

2.1 - Nelle condizioni (1.1), se f è lipschitziana in $[-m, m]$ con $m > 2\|g\|_{C^0}^2$, allora \mathfrak{T} è una contrazione nel seguente insieme chiuso di $(C^0[0, \delta])^2$:

$$\{(v, V) : \|v\|_{C^0} \leq m, \|V\|_{C^0} \leq M\},$$

$\forall M > 2\|\Phi'\|_{C^0}$, con δ opportuna quantità positiva dipendente da m, M e dai dati.

OSSERVAZIONE. Poiché la 2.1 può riferirsi anche all'analogha trasformazione con istante iniziale un generico $t_0 > 0$, allora, nelle condizioni (2.1), e se f è lipschitziana su ogni compatto, per il sistema (S) vale un teorema di unicità nella classe Γ .

Analogamente si ha:

2.2 - Nelle condizioni (1.8), se f' è lipschitziana in $[-m, m]$, con $m > 2\|g\|_{C^0}$, allora \mathfrak{T} è una contrazione nel seguente insieme chiuso di $(C^1[0, \delta])^2$:

$$\{(v, V) : \|v\|_{C^0} \leq m, \|v\|_{C^1} \leq m', \|V\|_{C^0} \leq M, \|V\|_{C^1} \leq M'\}$$

dove $M > 2\|\Phi'\|_{C^0}$, m' e M' sono maggiori di opportune quantità positive dipendenti da m e dai dati, e δ è anch'essa un'opportuna quantità positiva dipendente da tutti i parametri introdotti anche dai dati. Conseguentemente il problema (P) relativo a piccoli intervalli di tempo $(0, \delta)$ ammette una (ed una sola) soluzione nella corrispondente classe Γ^* .

²⁾ L'analogha condizione in [3] è erroneamente riportata nella forma $m > \|g\|_{C^0}$, nelle proposizioni 1.4, 1.5, 1.6.

La tecnica di dimostrazione dei precedenti risultati è quella già usata nel caso ad una fase; ne riportiamo i passaggi essenziali inserendo sinteticamente quanto è aggiuntivo.

Riferiamoci dapprima alla 2.1. Posto:

$$c_m = \sup_{|v| \leq m} |f(v)|,$$

allora, per $\delta < b/(2c_m)$, in $[0, \delta]$ si ha:

$$b/2 < s(t) < \frac{3}{2} b, \quad |s(t) - s(\tau)| \leq c_m |t - \tau|, \quad |s'(t)| \leq c_m;$$

indichiamo poi con l_m la costante di LIPSCHITZ di f in $[-m, m]$, con (ω_i, W_i) , $i=1, 2$, il corrispondente tramite \mathcal{C} dell'elemento (v_i, V_i) nel dominio di \mathcal{C} .

Ragionando come in [3] si ha:

$$\|w\|_{\mathcal{C}^0} \leq 2\|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} + c(b, m, M)\delta^{1/2} (1 + \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0})$$

$$\|W\|_{\mathcal{C}^0} \leq 2\|\Phi\|_{\mathcal{C}^1} + c(b, m, M)\delta^{1/2} (1 + \|\Phi\|_{\mathcal{C}^1})$$

nonché, se

$$(2.1) \quad \delta < 1/(2m^2 c_m),$$

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_{\mathcal{C}^0} \leq c(b, m, M)\omega(\delta) (1 + \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0}) (\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{C}^0} + \|V_1 - V_2\|_{\mathcal{C}^0})$$

$$\|W_1 - W_2\|_{\mathcal{C}^0} \leq c(b, m, M)\omega(\delta) (1 + \|\Phi\|_{\mathcal{C}^1}) (\|v_1 - v_2\|_{\mathcal{C}^0} + \|V_1 - V_2\|_{\mathcal{C}^0}),$$

ove $c(b, m, M)$ indica una funzione positiva e continua e $\omega(\delta)$ è un infinitesimo con δ . Da ciò l'asserto espresso nella 2.1.

Per quanto concerne la 2.2, osserviamo che, se v e V sono di classe C^1 , tenendo conto delle condizioni (1.8) si ha:

$$(2.2) \quad \dot{w}(t) = 2 \left\{ \dot{s}(t) \left(\int_0^t n(s(t), t, s(\tau), \tau) \dot{v}(\tau) d\tau + \int_0^t n_\xi(s(t), t, s(\tau), \tau) \{s'(\tau)(v(\tau)+q) - \gamma^2 V(\tau)\} d\tau + \int_0^b n(s(t), t, \xi, 0) \varphi'(\xi) d\xi \right) + \right. \\ \left. - \int_0^t g_\xi(s(t), t, s(\tau), \tau) \{v(\tau) + s^2(\tau)(v(\tau)+q) - \gamma^2 V(\tau)\} s'(\tau) d\tau + \right. \\ \left. - \int_0^t g(s(t), t, s(\tau), \tau) \{s'(\tau) \dot{v}(\tau) + \dot{s}(\tau)(v(\tau)+q) - \gamma^2 \dot{V}(\tau)\} d\tau + \int_0^b g(s(t), t, \xi, 0) \varphi''(\xi) d\xi \right\}$$

$$(2.3) \quad \dot{W}(t) = 2 \left\{ \dot{s}(t) \left(- \int_0^t K(s(t), t, s(\tau), \tau) \dot{V}(\tau) d\tau + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t K_\xi(s(t), t, s(\tau), \tau) \dot{s}(\tau) V(\tau) d\tau + \int_{b_+}^{+\infty} K(s(t), t, \xi, 0) \Phi''(\xi) d\xi + \\
& + \gamma^2 \int_0^t K_\xi(s(t), t, s(\tau), \tau) \{\ddot{V}(\tau) + \frac{\gamma}{\gamma^2} \dot{s}^2(\tau) V(\tau)\} d\tau + \\
& + \left. \int_0^t K(s(t), t, s(\tau), \tau) \{\ddot{s}(\tau) V(\tau) + \dot{s}(\tau) \dot{V}(\tau)\} d\tau + \gamma^2 \int_b^{+\infty} K(s(t), t, \xi, 0) \Phi'''(\xi) d\xi \right\};
\end{aligned}$$

dopo ciò, per $\delta < b/(2c_m)$, si ha:

$$\|w\|_{C^0} \leq 2\|\varphi\|_{C^0} + c(b, m, M)\omega(\delta)(1 + \|\varphi\|_{C^0})$$

$$\|W\|_{C^0} \leq 2\|\Phi'\|_{C^0} + c(b, m, M)\omega(\delta)(1 + \|\Phi'\|_{C^0})$$

$$\|\dot{w}\|_{C^0} \leq 2\|\varphi''\|_{C^0} + 2c_m \|\varphi'\|_{C^0} + c(b, m, m', M, M')\omega(\delta)(1 + \|\varphi'\|_{C^1})$$

$$\|\dot{W}\|_{C^0} \leq 2\gamma^2 \|\Phi'\|_{C^2} + 2c_m \|\varphi'\|_{C^1} + c(b, m, m', M, M')\omega(\delta)(1 + \|\Phi'\|_{C^2})$$

ove $c(b, m, M)$ e $c(b, m, m', M, M')$ denotano funzioni positive e continue e $\omega(\delta)$ è un infinitesimo con δ ; se vale la (2.1) si ha inoltre:

$$\|w_1 - w_2\|_{C^1} \leq c(b, m, m', M, M')\omega(\delta)(1 + \|\varphi\|_{C^2})(\|v_1 - v_2\|_{C^1} + \|V_1 - V_2\|_{C^1})$$

$$\|W_1 - W_2\|_{C^1} \leq c(b, m, m', M, M')\omega(\delta)(1 + \|\Phi'\|_{C^2})(\|v_1 - v_2\|_{C^1} + \|V_1 - V_2\|_{C^1})$$

ove c e $\omega(\delta)$ hanno il medesimo significato descritto sopra. Si può concludere che φ è una contrazione per piccoli intervalli di tempo $(0, \delta)$.

La possibilità di prolungare la soluzione per valori di t fuori di $(0, \delta)$ si basa sulle seguenti proposizioni:

2.3 - Nelle condizioni (1.1) e qualunque siano le costanti positive T, c, β , se (s, u, U) è soluzione del problema (P) relativo all'intervallo di tempo $(0, T)$ nella corrispondente classe Γ , ed è tale che

$$|f(u(s(t), t))| \leq c, \quad s(t) \geq \beta, \quad \forall t$$

allora risulta:

$$|u(x, t)| + |U(x, t)| + |U_x(x, t)| \leq C \quad \forall (x, t)$$

con C dipendente da $T, c, \beta, \varphi, \Phi$ ed indipendente da (s, u, U) .

Dim. Dalla (1.6'), in $(0, \delta)$ con $\delta < T$ si ha:

$$|V(t)| \leq C(c) \left(\omega(\delta) \sup_{\tau \in (0, \delta)} |V(\tau)| + \|U_x(x, 0)\|_{C^0} \right)$$

dove $\omega(\delta)$ è un infinitesimo con δ ; perciò per δ sufficientemente piccolo, dipen-

dente solo da c , risulta:

$$|V(t)| \leq C(c) \|U_x(x, 0)\|_{C^0} \quad t \in (0, \delta),$$

ed allora, ricordando l'espressione di U_x , con facili calcoli si ha pure:

$$|U_x(x, t)| \leq C(c) \|U_x(x, 0)\|_{C^0} \quad t \in (0, \delta);$$

similmente se l'istante iniziale è un generico $t_0 \in (0, T)$; allora, suddividendo $(0, T)$ in un numero finito di intervalli di ampiezza minore di δ , si ottiene in definitiva:

$$|U_x(x, t)| \leq C(T, c) \|\Phi'\|_{C^0} \quad t \in (0, T),$$

nonché, ricordando l'espressione di $U(x, t)$,

$$|U(x, t)| \leq C(T, c) \|\Phi\|_{C^1} \quad t \in (0, T).$$

Analogo è il ragionamento per ottenere che risulta:

$$|u(x, t)| \leq C(T, c, \beta) (1 + \|\varphi\|_{C^0} + \|\Phi'\|_{C^0}) \quad t \in (0, T).$$

2.4 - Nelle condizioni (1.8) e qualunque siano le costanti positive T, c, c', β , se (s, u, U) è soluzione del problema (P) relativo all'intervallo di tempo $(0, T)$ nella corrispondente classe Γ^* , ed è tale che

$$|f(u(s(t), t))| \leq c, \quad |f'(u(s(t), t))| \leq c', \quad s(t) \geq \beta \quad \forall t,$$

allora risulta:

$$(2.4) \quad |u_x(x, t)| + |u_{x^2}(x, t)| + |U_{x^2}(x, t)| + |U_{x^3}(x, t)| \leq C^*$$

ove C^* dipende da T, c, c', β , nonché da φ e Φ , e non dipende da (s, u, U) .

Dim. Proviamo dapprima che le (2.4) valgono in un intervallo $(0, \delta)$ per $\delta < T$ e sufficientemente piccolo. Ricordando che \dot{v} e \dot{V} sono rappresentate dai secondi membri delle (2.2) e (2.3), per $t \in (0, \delta)$ si ha:

$$|\dot{v}(t)| + |\dot{V}(t)| \leq C^* \left[\omega(\delta) \left(\sup_{\tau \in (0, \delta)} |\dot{v}(\tau)| + \sup_{\tau \in (0, \delta)} |\dot{V}(\tau)| \right) + 1 \right]$$

dove C^* dipende da c, c', β e da φ e Φ , ma non dipende da (s, u, U) , e $\omega(\delta)$ è un infinitesimo con δ ; allora, per δ sufficientemente piccolo, dipende solo da C^* , risulta:

$$|v(t)| + |V(t)| \leq C^* \quad \forall t \in (0, \delta)$$

e quindi, tenendo presenti le espressioni delle derivate $u_x, u_{x^2}, U_{x^2}, U_{x^3}$, si ot

tengono le (2.4) per $t \in (0, \delta)$ con C^* dipendente da c, c', β, φ e Φ .

Per completare la dimostrazione basta provare che, se tali limitazioni valgono in un intervallo $(0, \tau_0)$ con $\tau_0 < T$ ed arbitrario, allora esse sussistono anche in $(0, \tau_0 + \varepsilon)$ con ε positivo opportuno; a tal fine osserviamo che, dalla rappresentazione di \dot{v} e \dot{V} nell'intervallo $(t_0, t_0 + \delta)$ con $t_0 \in (0, \tau_0)$ e $t_0 + \delta < \tau_0$, grazie alle (2.4) relative a $(0, \tau_0)$, in $(t_0, t_0 + \delta)$ si ha:

$$|\dot{v}(t)| + |\dot{V}(t)| \leq C^* \left[\omega(\delta) \left(\sup_{\tau \in (t_0, t_0 + \delta)} |\dot{v}(\tau)| + \sup_{\tau \in (t_0, t_0 + \delta)} |\dot{V}(\tau)| \right) + 1 \right]$$

con C^* indipendente da t_0 ; dunque per δ sufficientemente piccolo (ed indipendente da t_0) risulta:

$$|\dot{v}(t)| + |\dot{V}(t)| \leq C^* \quad \forall t \in (0, t_0 + \delta)$$

da cui le (2.4) per $t \in (0, t_0 + \delta)$, con C^* indipendente da t_0 e quindi l'asserto.

Dalle proposizioni 2.2, 2.3 e 2.4 si deduce il seguente teorema di esistenza (e unicità) in Γ^* :

2.5 - Nelle condizioni (1.8), se $f > 0$ e f' è lipschitziana su ogni compatto non ché limitata, allora il problema (P) ammette una (ed una sola) soluzione di classe Γ^* .

Dim. Basta provare che se la soluzione, (s, u, U) , esiste per $t < T$, con T arbitrariamente scelto, essa esiste anche per $t < T + \varepsilon$, per qualche ε positivo.

Orbene, essendo f e f' limitate ed essendo inoltre $s(t) > b$ perché $\dot{s}(t) > 0$, per $t < T$ risulta:

$$\sum_{i=0}^2 |u_{x_i}(x, t)| + \sum_{j=1}^3 |u_{x_j}(x, t)| \leq C^*$$

ove C^* dipende solo dai dati; applichiamo ora la 2.2 prendendo come istante iniziale $t_0 < T$; è evidente che si può fare una scelta di m, m', M, M' e quindi di δ che va bene $\forall t_0$; allora la soluzione (s, u, U) può prolungarsi oltre T .

OSSERVAZIONE. Se $\Phi = 0$ (problema ad una fase) ed inoltre $q > 0$, $0 < \varphi(x) < 1$, $f(v) > 0$ per $v > 0$ e $f(v) < 0$ per $v < 0$, oppure $q + 1 > 0$, $0 < \varphi(x) < 1$, $f(v) > 0$ per $v > 0$ e $f(0) = 0$, allora, usando il principio del massimo, si stabilisce la limitazione a priori:

$$0 \leq u(x, t) \leq 1,$$

dalla quale si deduce in particolare $s(t) > b$; in tal caso si ritrova il teorema di esistenza provato in [3]³⁾. È utile altresì osservare che se $\Phi < 0$ e $\varphi < 1$, nonchè $q + 1 > 0$, grazie al principio del massimo, per la componente u della soluzione del problema (P) vale la limitazione:

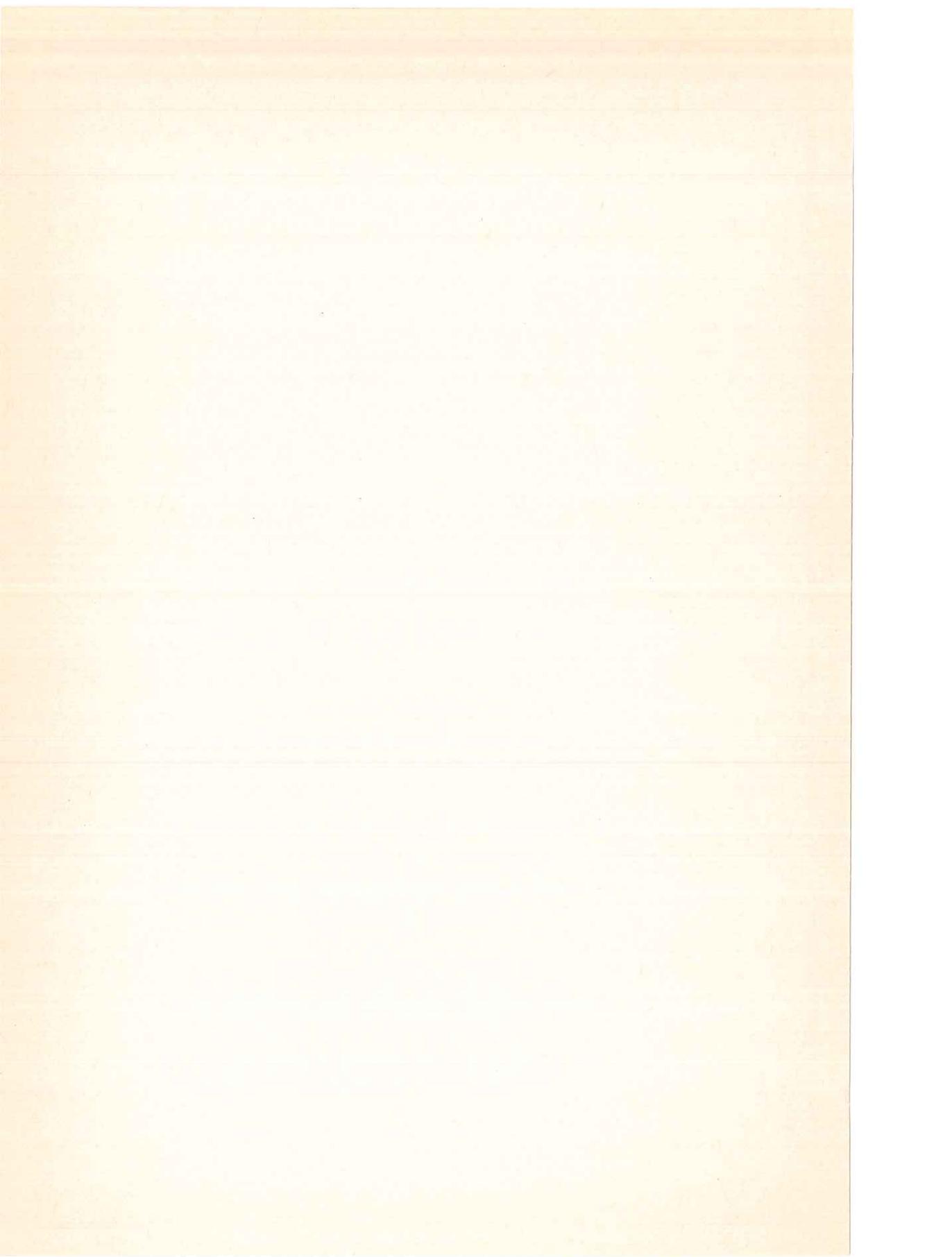
$$u(x, t) \leq 1.$$

³⁾ Con tale osservazione si vogliono anche precisare le condizioni analoghe a quelle di sopra relative alla nota [3].

B I B L I O G R A F I A

- [1] G.ASTARITA - S.JOSHI, *Sample-dimension effects in the sorption of solvents in polymers - A mathematical model*. J. of Membrane Science, 4(1978), 165-182.
- [2] G.ASTARITA - G.C.SARTI, *A Class of Mathematical Models for Sorption of Swelling Solvents in Glassy Polymers*. Polymer Engin. and Science, 18(1978), 388-395.
- [3] T.BRUNO - G.MONTAGNARO, *Su un problema di frontiera mobile in cui il fronte è una linea di discontinuità*. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, Serie IV, XLIX/I (1982), 51-72.
- [4] A.FRIEDMAN, *Free boundary problems for Parabolic Equations I, II, III*. J. of Math. and Mech., 8(1959), 499-517; 9(1960), 19-66; 9(1960), 327-345.
- [5] C.D.HILL - D.B.KOTLOW, *Classical Solutions in the Large of a Two-Phase Free Boundary Problem, I, II*. Arch. Rat. Mech. and Anal., 45(1972), 63-78; 47(1972), 369-379.
- [6] G.I.SISKIN, *On a heat transfer problem with free boundary*. Soviet Math. Dokl., 12(1971), 682-686.
- [7] G.I.SISKIN, *A certain problem with a free boundary for a system of parabolic equations*. Cisl. Metody Meh. Splosnoi Sredy, 3(1972), 105-121.
- [8] G.I.SISKIN, *On a problem of Stefan type with discontinuous moving boundary*. Soviet Math. Dokl., 16(1975), 1409-1412.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai Soci C.Ciliberto, D.Greco ed A.Franchetta.



DECOMPOSIZIONE FOTOCHIMICA DEGLI N-OSSIDI DELLA TRIFENODIOSSAZINA

Nota di Adele Bolognese* e Raffaele Maglione

Presentata dal Socio ordinario Rodolfo Alessandro Nicolaus

Adunanza del 4/2/1984

Riassunto. L'N-ossido e l'N,N'-diossido della trifenodiossazina sono sostanze fotolabili. Irradiati con luce di lunghezza d'onda compresa tra 300 e 450 nm, si decompongono molto rapidamente fornendo l'eterociclico di partenza. L'N-ossido, più stabile dell'N,N'-diossido, non si decompone quando è irradiato con luce di lunghezza d'onda maggiore di 450 nm. E' possibile quindi ottenere la conversione dell'N,N'-diossido in N-ossido e dell'N-ossido in trifenodiossazina, operando con luce di diversa lunghezza d'onda.

Abstract. Triphenodioxazine N-oxide and N,N'-dioxide, when exposed to light of 300-450 nm wave lengths, decompose rapidly into triphenodioxazine. The only N-oxide does not undergo photochemical decomposition by light of wave lengths longer than 450 nm. The two reactions of conversion of N,N'-dioxide into N-oxide can be separate because of N-oxides different photolability.

INTRODUZIONE

Gli N-ossidi aromatici¹ sono un gruppo di sostanze di grande interesse: la loro reattività si collega infatti con la proprietà di fungere da antiossidanti, da inibitori delle reazioni di polimerizzazione radicalica e da antibatterici. Gli N-ossidi sono inoltre ampiamente diffusi in natura tra i metaboliti dei microrganismi e degli invertebrati marini e nel vasto campo degli alcaloidi.

Il nostro interesse per i sistemi fenossazinonici² provenienti dall'ossidazione dell'o-amminofenolo e dei loro derivati ci ha condotti alla sintesi degli N-ossidi della trifenodiossazina³ e all'esame del loro comportamento fotochimico. Gli N-ossidi sono infatti una classe di sostanze eccezionalmente sensibili alla luce.

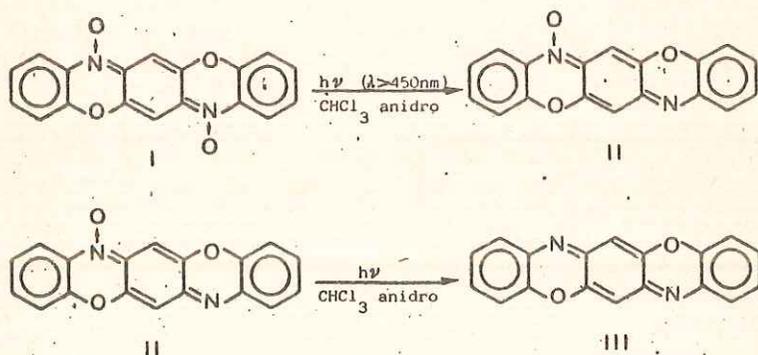
RISULTATI E DISCUSSIONE

Nel corso della sintesi degli N-ossidi della trifenodiossazina, abbiamo notato che le soluzioni cloroformiche dell'N,N'-diossido I e dell'N-ossido II sono molto instabili alla luce e che vanno prese adeguate

*Istituto di Chimica Organica e Biologica, Università di Napoli
via Mezzocannone 16, 80134-Napoli, Italia

precauzioni nel maneggiarli. Infatti, un campione di 1 cc di una soluzione cloroformica $10^{-5}M$ dell'*N,N'*-diossido blu (λ_{max} 437) si decolora in 30" quando viene esposto, in un recipiente di quarzo, alla luce di una lampada solare di 650 W (Osram) a temperatura ambiente. L'*N*-ossido (λ_{max} 527) è più stabile: operando nelle stesse condizioni, dopo 3' di irradiazione, è possibile rilevare ancora tracce cromatografiche del prodotto di partenza.

In entrambi i casi, nelle soluzioni irradiate è presente la trifenodiossazina III, quale prodotto della fotodecomposizione.



Ciò dimostra che questi *N*-ossidi si deossigenano per azione della luce solare e forniscono il composto eterociclico di partenza. La trifenodiossazina così ottenuta è stata identificata mediante confronto cromatografico e spettrale con un campione autentico⁴.

La reazione di deossigenazione è uno degli aspetti più peculiari della reattività degli *N*-ossidi e riveste un particolare interesse per i composti eterociclici, in quanto avviene in condizioni molto più blande di quelle richieste per gli *N*-ossidi alifatici. L'interesse è ancora maggiore quando, come nel nostro caso, la reazione di deossigenazione è indotta dalla luce sul sistema della trifenodiossazina, strettamente collegato ai modelli di pigmenti fotosensibili.

Alla luce delle osservazioni riportate sulla differente fotosensibilità dei due *N*-ossidi citati, e per esaminarne il comportamento, li abbiamo irradiati con luci di differenti lunghezze d'onda in un solvente aprotico come il cloroformio. In presenza di solventi protici, come è noto, possono intervenire varie e non ben controllate reazioni che, ad opera dell'ossigeno molto attivo, portano alla formazione di chinoni e fenoli. L'anidricità del cloroformio e l'eliminazione dell'etanolo presente come stabilizzatore nel prodotto commerciale sono necessarie per ottenere la ri-

producibilità delle trasformazioni descritte.

Se la fotodecomposizione dell'*N,N'*-diossido I in cloroformio anidro (1 cc di soluzione 10^{-3} M) è condotta a 0°C con una lampada da 650 W a 10 cm dal campione, in un recipiente di quarzo, dopo 15' si ottiene una miscela di *N*-ossido e trifenodiossazina. Un risultato analogo si ottiene conducendo la fotodecomposizione con il filtro pyrex che taglia fuori lunghezze d'onda inferiori a 390 nm. Se invece, durante la fotodecomposizione, il campione è protetto con un filtro al solfato di rame (la soluzione filtro di 1 cm di spessore è preparata con 27 gr. di $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$, 30 gr. di NaNO_2 e 50 ml di NH_4OH con diluiti con acqua a 1000 ml), che taglia fuori lunghezze d'onda inferiori a 450 nm, allora si ottiene come prodotto della fotodecomposizione l'*N*-ossido. L'*N*-ossido dunque è stabile alla luce di lunghezza d'onda superiore a 450 nm.

Irradiando l'*N*-ossido II, a 20° , con luce di lunghezza d'onda inferiore a 450 nm proveniente sia da una lampada solare da 650 W che da una lampada a vapori di mercurio (di media pressione) da 450 W, si ottiene come unico prodotto della decomposizione la trifenodiossazina. La figura 1 riporta l'andamento di questa fotodecomposizione, seguita mediante misure spettrofotometriche. La presenza di ben due punti isosbastici a 512 nm e a 483 nm dimostra che la trasformazione è quantitativa e che non si formano specie intermedie: la densità ottica della soluzione finale di trifenodiossazina coincide con la molarità della soluzione dell'*N*-ossido di partenza.

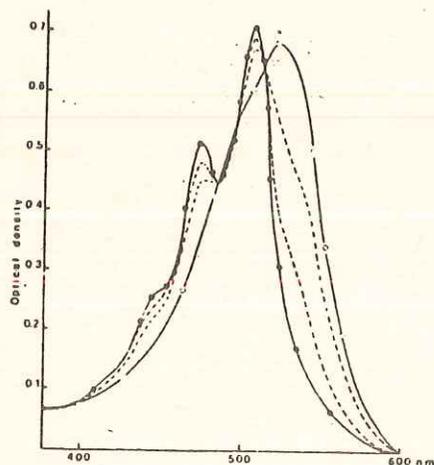


Fig. 1
Fotodecomposizione dell'*N*-ossido della trifenyldiossazina con lampada solare da 650 W. La soluzione è $5 \cdot 10^{-3}$ M, le celle sono di quarzo da 1 cm. Lo spettrofotometro utilizzato è un Perkin-Elmer 550 S.
o curva di assorbimento dell'*N*-ossido non esposto
--- curve a vari tempi di esposizione
o curva dopo 10' di esposizione

La reazione di deossigenazione chimica degli N-ossidi, per azione di agenti riducenti come il tricloruro di fosforo e l'acido ascorbico, porta alla formazione della trifenodiossazina⁵. Per riduzione dell'N,N'-diossido non si ottengono in nessun caso tracce dell'N-ossido.

La fotodecomposizione quindi, condotta con luce di opportuna lunghezza d'onda, è un metodo di riduzione molto selettivo che permette di ottenere l'N-ossido dall'N,N'-diossido.

BIBLIOGRAFIA

- 1) A.R. Katritzky and J. M. Logowski, "Chemistry of the Heterocyclic N-Oxides", Academic Press, London 1971 e bibliografia ivi contenuta.
- 2) A. Bolognese, C. Piscitelli and G. Scherillo, *J. Org. Chem.*, 48 1019 (1983).
- 3) A. Bolognese e R. Maglione, questo giornale, IV- vol. LI, 1983.
- 4) W. Schäfer, I. Geyer and H. Schulde, *Tetrahedron*, 28 3811 (1972).
- 5) E. Ochiai, "Aromatic amine oxides", Elsevier Publishing Company, London 1967.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. Nicolaus, V. Leone, L. Iannelli.

STRUTTURA E PROPRIETA' DEGLI OMMOCROMI.

Ossidazione dell'estere metilico della 3-idrossichinurenina.^{1a}

Nota dei dottori A. Bolognese, R. Liberatore, C. Piscitelli, G. Scherillo^{1b}, U. Vettori^{1c}.

presentata dal socio ordinario prof. Rodolfo Alessandro Nicolaus.

Adunanza del 3 marzo 1984.

Summary. As a continuation of the previous study^{2,3,4,5} the oxidation of 3-hydroxykynurenine has been investigated. A lot of isomeric, yellow compounds have been obtained. These compounds contain only two nitrogen atoms. A complex mixture of red and blue compounds has been obtained from the acidic treatment of yellow-oxidation products. This transformation is an internal reaction.

Riassunto. Continuando il lavoro intrapreso sullo studio di composti modello degli ommocromi^{2,3,4,5} abbiamo esaminato l'ossidazione dell'estere metilico della 3-idrossichinurenina (5). Si ottengono numerosi composti gialli, che alla massa mostrano contenere solo due atomi di azoto. Per trattamento con metanolo-HCl, dai composti gialli di ossidazione si ottengono vari composti rosso-viola. I composti rosso-viola e quelli gialli di partenza sono isomeri e pertanto il trattamento con acidi provoca una ossido-riduzione interna. Mediante misure di massa è stato anche osservato che alcuni composti rosso-viola contengono cloro.

La più evidente ed interessante caratteristica dei cefalopodi che colpisce molto i visitatori degli acquari è la facilità con cui questi invertebrati cambiano colore e spessore della pelle. Questi cambiamenti sono regolati da un complesso meccanismo neuromuscolare. La pelle dei cefalopodi contiene delle vere e proprie sacche di pigmenti dette cromatofori che, per azione di alcuni sottili muscoli che sono attaccati alla membrana, si estendono e si contraggono provocando il cambiamento di colore e di disegni sulla pelle. I pigmenti presenti nei cromatofori sono stati oggetto di studi da parte di numerosi autori⁶, ma poco o nulla si sa ancora sulla loro struttura e

sulle loro proprietà.

Alcuni autori hanno mostrato che essi appartengono alla classe degli ommocromi⁷ in quanto metaboliti del triptofano(1), attraverso la 3-idrossichinurenina(2). Per ossidazione chimica di 2 si ottengono infatti la Xantommatina (3) di colore giallo e la Diidroxantommatina (4) di colore rosa, i soli ommocromi di cui si conosce attualmente la struttura, mentre non si conosce quella degli ommocromi rosso-viola a più alto peso molecolare, le cosiddette ommine⁶.

A causa delle difficoltà che si incontrano nello studio dei pigmenti naturali sia nella reperibilità di fonti fresche, e sia sull'isolamento e purificazione è stato necessario studiare il comportamento di composti fenossazinonici modello^{3,4}.

E' stato intrapreso lo studio dei modelli utilizzando i prodotti derivanti dall'ossidazione del 2-ammino-3-idrossiacetofenone, ma questi modelli sono stati scartati perchè in essi non si osservavano le trasformazioni caratteristiche dei prodotti naturali²:

E' stato, quindi, ossidato l'estere metilico della 3-idrossichinurenina (5).

Il composto 5 si ottiene facilmente trattando 2 per tre ore con metanolo saturo di HCl anidro. Dopo aver allontanato il solvente e l'HCl in eccesso per evaporazione sotto vuoto, il residuo giallo-chiaro, così ottenuto, si purifica su lastre semipreparative di Gel di silice, usando come eluente la miscela A: CHCl_3 - C_6H_6 - CH_3OH : 45/45/10. Lo spettro ¹HNMR⁸ di 5 presenta un sistema aromatico AMX, con due doppietti a 7,4 e 6,9 δ un tripletto a 6,5 δ ed i segnali relativi alla catena $-\text{CO}-\overset{\text{NH}_2}{\text{CH}_2}-\overset{\text{H}}{\text{CH}}-\text{COOCH}_3$ consistenti in un tripletto a 4 δ , un singoletto a 3,85 δ ed un doppietto a 3,6 δ . Il composto fonde con decomposizione, all'UV mostra un massimo di assorbimento a 380nm.

Per aggiunta di una soluzione di ferricianuro potassico 0,1M, pH 6,8, si ottiene una colorazione giallo-arancio con formazione di piccole quantità di un precipitato disperso, infiltrabile. Dopo aver tenuto la miscela per 30' a 40° C, i prodotti di ossidazione vengono estratti con CHCl_3 ripetutamente, ino a che il solvente di estrazione non appare incolore; le acque madri restano colorate per la presenza del ferricianuro. La polvere giallo scura, ottenuta dopo evaporazione del solvente sotto vuoto, esaminata su lastre analitiche di Gel di silice, usando la miscela A sopra descritta, mostra essere formata da numerosi composti gialli, con R_f molto vicini. Per trattamento delle lastre con una soluzione acquosa di acido ascorbico o per esposizione a vapori di SO_2 , dai prodotti gialli si ottengono colorazioni rosso-viola, aventi il cromoforo simile a quello delle ommine.

L'isolamento dei prodotti di ossidazione appare molto complesso sia per la vicinanza

degli R_f , sia perchè i vari composti sono molto labili e si trasformano continuamente. Per avere notizie sulla struttura dei composti presenti abbiamo eseguito un'indagine preliminare sulla miscela grezza.

Nello spettro di massa⁹, sorprendentemente compaiono picchi molecolari con numero di massa pari che contengono due soli atomi di azoto, in contrasto con le strutture di tipo 3 e 4 ottenute per ossidazione di 2⁷.

Occorre, a questo punto, osservare che il metodo descritto in letteratura⁷ prevede un trattamento, dopo l'ossidazione con ferricianuro potassico della 2, con SO_2 , allo scopo di trasformare i prodotti gialli nei loro composti di riduzione rossi insolubili. Tale trattamento che, peraltro, porta alla precipitazione solo di piccole quantità di materiale, può senz'altro alterare gli altri composti presenti sensibili agli acidi. Molte volte il trattamento descritto con ammoniaca, per ottenere sali, può anche essere responsabile dell'introduzione di un atomo di azoto.

Il metodo da noi usato per l'ossidazione di 5 permette di ottenere quantitativamente tutti i prodotti di ossidazione, riducendo al minimo le possibili alterazioni.

Lo spettro¹ 1H NMR della miscela di ossidazione in $CDCl_3$, in accordo con i dati ottenuti dallo spettro di massa, mostra due doppietti a 7,5 δ e 6,5 δ accoppiati tra loro, ($J=13Hz$), indicativi della presenza di una catena $-CO-CH=CH-COOCH_3$, i protoni aromatici compaiono nella posizione caratteristica degli anelli fenossazinonici⁵.

La deaminazione della catena aminoacidica si può spiegare con un meccanismo basato sulla formazione di un ortoamminochinone ciclico (7) da cui facilmente si ottiene 8 che, successivamente dimerizza. La dimerizzazione ossidativa dei chinoni è una reazione già nota⁷. I numerosi composti che si ottengono derivano, probabilmente, da strutture di tipo 9 o 10 che ulteriormente si trasformano nel corso dell'ossidazione.

In effetti, nello spettro di massa si osservano picchi intensi a 436m/e, corrispondenti appunto ai composti 9 e 10, a 450m/e e 451m/e di difficile interpretazione.

Allo scopo di provare la stabilità agli acidi dei prodotti di ossidazione, analogamente a quanto già fatto per gli altri ommocromi modello ottenuti dall'ossidazione del 2-ammino-3-idrossiacetofenone⁵, abbiamo trattato la miscela con metanolo saturato con HCl.

Portando a secco la miscela, dopo sei ore si ottengono composti di colore rosso e viola.

Anche questi prodotti sono apparsi difficilmente amstabili su Gel di silice ed, analogamente ai precursori gialli, sono molto instabili.

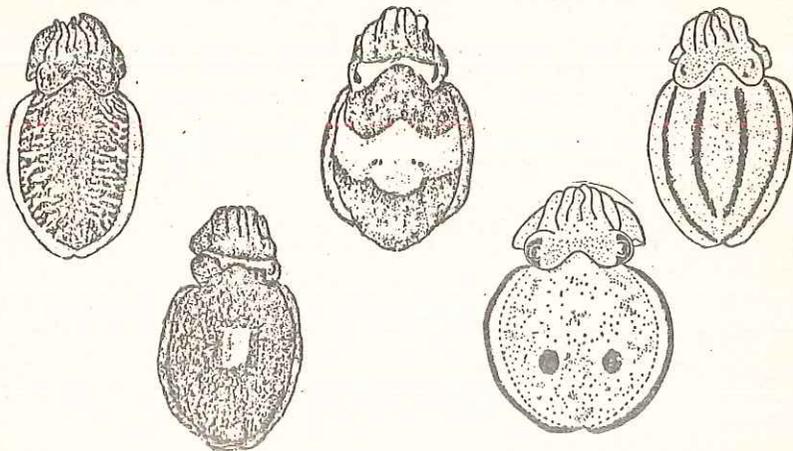
E' possibile eseguire una parziale purificazione su lastra separando i prodotti rossi, con R_f minore di quelli viola. I composti rossi presentano un picco molecolare a 450m/e corrispondente, da misure ad alta risoluzione a $C_{23}H_{18}N_2O_9$ e a $C_{22}H_{16}N_2O_9$, isomeri di alcuni composti gialli. La trasformazione giallo-rosso, quindi, è una complessa reazione di ossido-riduzione catalizzata dagli acidi, simile a quella che abbiamo osservato in alcuni pigmenti estratti dai cefalopodi², confermata dallo spettro ¹HNMNR in cui i protoni aromatici compaiono nella posizione caratteristica degli anelli fenossazinici⁵. Alcuni composti viola contengono cloro, corrispondenti ad uno spettro di massa avente il picco molecolare a 484m/e.

Abbiamo così dimostrato che per ossidazione di 5 non si ottengono solo 3 e 4, ma altri prodotti le cui strutture e proprietà appaiono molto simili a quelle dei composti naturali².

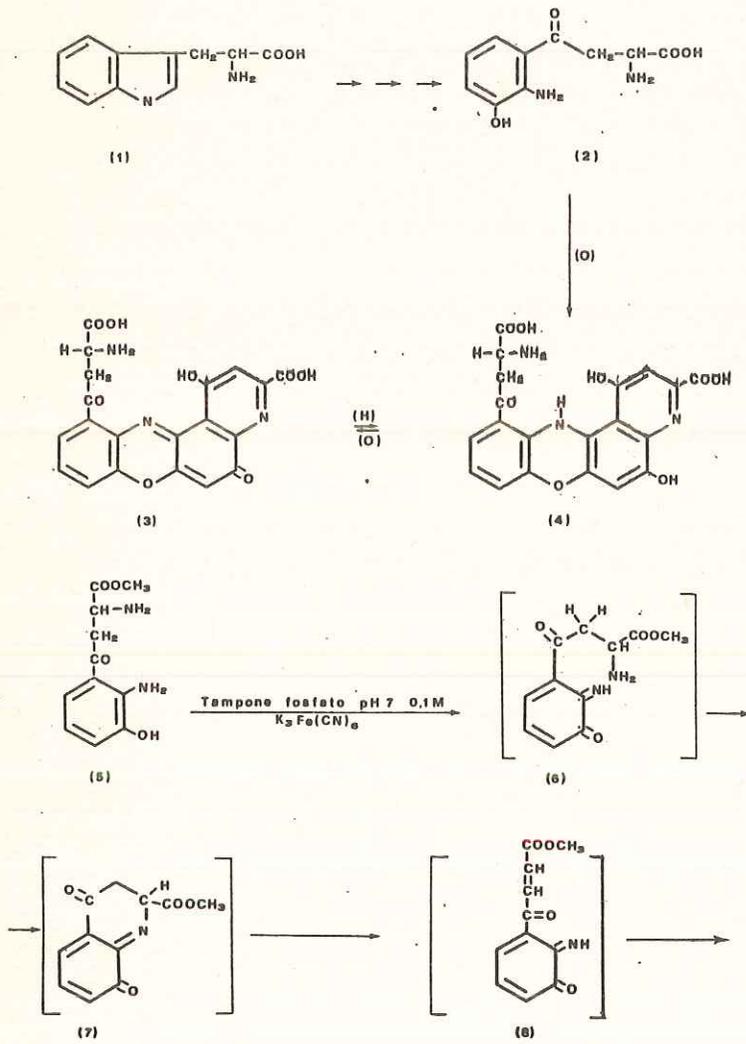
I prodotti rosso-viola hanno il cromoforo simile, derivante dal riarrangiamento dei prodotti di ossidazione di 5, senza l'intervento di reattivi esterni al contrario di quanto già descritto in letteratura⁶. Il fatto che alcuni composti viola contengano cloro non è in contrasto con quanto detto prima, in quanto abbiamo osservato che il cloro non ha alcuna influenza sul cromoforo.

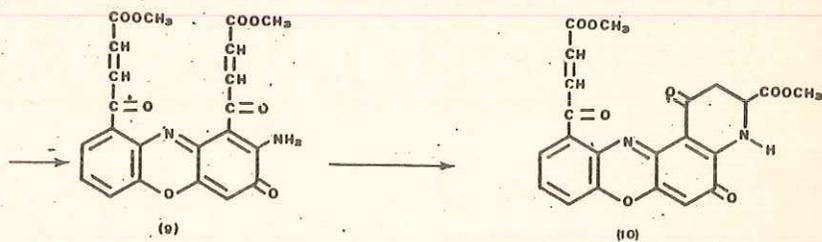
La catena $-CO-CH=CH-COOCH_3$, derivata dalla deaminazione, è un sito molto reattivo che può permettere l'addizione nucleofila di vari composti come tiofili, ammine, alcoli, aminoacidi, e spiegare così la complessità degli ommocromi a peso molecolare maggiore come le omme.

Trasformazioni cromatiche della "Sepia officinalis"



SCHEMA





Note

- 1 a Questo lavoro è stato finanziato da un contributo del CNR-Italia
- b Dipartimento di Chimica organica e biologica. Via Mezzocannone 8 80134 Napoli Italia
- c Istituto chimico. Via Marzolo 1 Padova
- 2 A. Bolognese e G. Scherillo, *Experientia* **30** 225 (1974)
- 3 A. Bolognese, C. Piscitelli e G. Scherillo, questo giornale **51** (1983)
- 4 A. Bolognese, C. Piscitelli e G. Scherillo, questo giornale **51** (1983)
- 5 A. Bolognese, C. Piscitelli, G. Scherillo, *J. Org. Chem.* **48**, 3649 (1983)
- 6 B. Linzen, *Naturwissenschaften*, **48**, 461 (1959)
- 7 A. Butenandt, U. Schiedt, E. Biekert, *Ann. Chem. Liebigs* **588** 100 (1954)
- 8 Gli spettri ¹H NMR sono stati eseguiti con uno spettrometro Bruker 270-MHz
- 9 Gli spettri di massa sono stati eseguiti a Padova con un apparecchio VG. ZAB. 2F

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci P. Corradini, R. Nicolaus, V. Leone.

MODIFICAZIONI DELLA MALATO DEIDROGENASI NELL'IPOTALAMO DI
TOPO DURANTE LO SVILUPPO.

Nota di [†]Gabriella Chieffi, [†]Maria F. Caliendo, [†]Mario Milone:

Presentata dal Socio Ordinario Vincenzo Leone

Adunanza del 3/3/84.

Riassunto

Gli Autori hanno preso in esame le variazioni ontogenetiche del contenuto proteico e della malato deidrogenasi nell'ipotalamo di topo dal 9° giorno di gravidanza al 270° giorno dopo il parto. Il contenuto proteico non mostra differenze tra i sessi e diminuisce significativamente all'inizio del periodo del differenziamento sessuale dell'ipotalamo (5° giorno dopo il parto). L'attività della malato deidrogenasi mostra un netto aumento in coincidenza del differenziamento della gonade e poi diminuisce di circa la metà al termine del differenziamento sessuale dell'ipotalamo (10° giorno dopo il parto). Inoltre, nel maschio, mostra una ulteriore diminuzione al termine del 6° mese, quando la fertilità declina.

Le modificazioni dell'attività di questo enzima, nel corso dello sviluppo, mostrano interessanti correlazioni con quelle relative alle concentrazioni sia degli ormoni sessuali che dei loro recettori.

Abstract

Ontogenic variations of total protein content and malate dehydrogenase (MDH) activity in the mouse hypothalamus have been studied during 9th day pregnancy - 270th day post-partum interval. No differences in the protein content between sexes have been detected. The protein content decreased at the start of the hypothalamic sexual differentiation (5th day post-partum). The MDH activity showed a strong increase at the onset of gonadal differentiation (12th day of pregnancy) and decreased when the hypothalamus was sexually

[†]Istituto e Museo di Zoologia, Università di Napoli, Napoli.

differentiated (10th day post-partum). In the male, MDH activity displayed a further decrease at the end of the 6th month, when the fertility declined.

The modifications of MDH activity showed remarkable correlations with the concentrations of both sex hormones and their receptors.

Nel corso degli studi condotti finora sull'ipotalamo di Mus musculus domesticus abbiamo preso in considerazione tre periodi "critici" per quanto concerne l'attività di alcuni enzimi: a) il periodo del differenziamento ipotalamico, che avviene tra il 5° e il 10° giorno dopo il parto (Varriale et al., 1983); b) la pubertà, che inizia tra il 20° e il 25° giorno (Lampariello et al., 1981); c) la senescenza, che inizia dal 7° mese (Milone et al., 1979).

Mancano finora dati circa le variazioni dell'attività enzimatica nel corso dello sviluppo. A tale scopo abbiamo preso in esame la malato deidrogenasi (MDH), enzima del ciclo di Krebs, che si è rivelata un ottimo marker del metabolismo ipotalamico (Milone et al., 1978) e, in particolare della respirazione cellulare (Roodyn, 1967). La MDH è un enzima steroide-dipendente, dato che la sua attività viene influenzata dagli estrogeni (Luine et al., 1974), dai progestinici (Milone et al., 1979) e dagli androgeni (Milone et al., 1981).

Materiale e metodi

La ricerca è stata eseguita su Mus musculus domesticus, ceppo Swiss albino cc. I feti, i neonati e gli adulti erano ottenuti per accoppiamento di due maschi e cinque femmine

per gabbia . In totale sono stati esaminati 270 individui. Nel periodo prenatale i feti venivano prelevati 10,7,5 e 2 giorni prima del parto. La determinazione del sesso veniva eseguita in base al riconoscimento della gonade al binoculare dal 5° giorno prima del parto. Dopo il parto i piccoli erano sacrificati in numero di cinque per stadio ogni cinque giorni fino all'età di 90 giorni. Successivamente i prelievi venivano eseguiti ogni 30 giorni fino all'età di 270 giorni. Dopo lo svezzamento (20-25 giorni) gli animali erano stabulati in condizioni unisessuali in numero di cinque animali per gabbia. Agli animali, sacrificati previa narcosi in etere, veniva prelevato velocemente l'ipotalamo, pesato ed omogeneizzato in 3 ml di acqua distillata.

La determinazione della MDH era eseguita secondo il metodo di Kitto e Kaplan (1966), modificato da Milone et al. (1975).

Il contenuto proteico era determinato secondo il metodo di Lowry et al. (1951).

Risultati (Tabella 1)

10°-7°giorno prima del parto

Proteine Dal 10° al 7° giorno prima del parto il contenuto proteico dell'ipotalamo dei feti ancora sessualmente indifferenziati non mostra significative variazioni rispetto ai valori osservati negli stadi successivi prima del parto, sia nei maschi che nelle femmine.

M D H L'attività dell'enzima aumenta significativamente in

questo periodo.

5°- 2° giorno prima del parto

Proteine Il contenuto proteico non si modifica rispetto al periodo precedente e non mostra differenze significative tra maschi e femmine.

M D H L'attività dell'enzima, che mostra una tendenza ad aumentare rispetto agli stadi precedenti, pur non significativa, non presenta variazioni tra i sessi.

0-25° giorno dopo il parto

Proteine In questo periodo, in entrambi i sessi, il contenuto proteico tende a diminuire significativamente; inoltre non sono rilevabili differenze tra i sessi.

M D H Sia nel maschio che nella femmina l'attività della MDH diminuisce significativamente tra il 5° e il 10° giorno e ancor più al 15° giorno, rimanendo poi costante sino al termine dello svezzamento. L'unica differenza tra i sessi la si riscontra al termine differenziamento sessuale dell'ipotalamo, quando la attività dell'enzima nella femmina è lievemente inferiore rispetto a quella del maschio.

30°-180° giorno dopo il parto

Proteine Nel maschio non si osserva alcuna variazione significativa del contenuto proteico, mentre nella femmina si evidenzia una lieve diminuzione significativa dal 75° giorno.

M D H Nel maschio l'attività dell'enzima resta praticamente invariata, mentre nella femmina, tra il 40° e il 50° giorno, si osserva un aumento dell'attività della MDH, che rimane poi costante fino al 180° giorno.

210°-270° giorno dopo il parto

Proteine Il contenuto proteico resta costante fino al 270° giorno, sia nel maschio che nella femmina, anche se in quest'ultima i valori si mantengono più bassi rispetto al maschio.

M D H Nel maschio notiamo una significativa diminuzione dell'attività enzimatica, che nella femmina rimane invece invariata e su livelli più elevati del maschio fino al 270° giorno.

Discussione

Dalle nostre ricerche risulta che, nel corso dello sviluppo del topo, il contenuto proteico dell'ipotalamo è molto elevato durante la vita intrauterina, cioè nel periodo di intenso anabolismo proteico e declina gradualmente dopo la nascita, indipendentemente dal sesso. Nel ratto, invece, l'incremento del contenuto proteico continua anche nei primi 10-15 giorni dopo il parto (Cohn e Richter, 1956).

Circa l'attività della MDH, dopo un iniziale aumento nella vita intrauterina, essa declina improvvisamente tra il 5° e il 10° giorno dopo la nascita, cioè durante il differenziamento sessuale dell'ipotalamo. Inoltre al 10° giorno compare la pri-

ma differenza significativa tra i sessi, in quanto tale diminuzione risulta maggiore nella femmina. Tale dato si aggiunge alle altre caratteristiche che differenziano l'attività dello ipotalamo femminile (ciclicità della secrezione di GnRH, di sintesi proteica ecc.) (Mc Ewen et al., 1977). Un'altra differenza significativa tra i sessi si riscontra dal 40° al 50° giorno, quando nella femmina si osserva un aumento significativo dei valori di attività enzimatica, che restano invariati fino al 270° giorno. Una ulteriore diminuzione dell'attività enzimatica si riscontra nel maschio dopo il 6° mese in coincidenza col declino della fertilità, mentre nella femmina l'attività enzimatica rimane elevata. È interessante notare che, nella femmina, la fertilità continua oltre il 6° mese fino a un anno di vita (Di Matteo et al., 1982). Precedenti ricerche hanno dimostrato la steroide-dipendenza della MDH (Luinè et al., 1974; Milone et al., 1979). Le modificazioni dell'attività di questo enzima osservate nel corso dello sviluppo, in particolare nel periodo del differenziamento sessuale dell'ipotalamo potrebbero essere interpretate in funzione delle variazioni della concentrazione dei recettori per gli ormoni sessuali. Infatti, Vito e Fox (1982) hanno osservato che, pur essendo la concentrazione dei recettori per gli estrogeni sempre superiore a quella degli androgeni, si nota un aumento di entrambi i recettori dal 10° giorno di vita in poi.

Nel maschio notiamo una diminuzione dell'attività enzimatica-

tica al 20° giorno, periodo in cui si riscontra un aumento della sensibilità al feedback operata dagli androgeni nello ipotalamo (Selmanoff et al.,1977). Inoltre, tale diminuzione, che é ancora più marcata alla senescenza, coincide con un decremento del tasso testicolare del testosterone, riscontrato nel topo da Berger et al.(1975).

Nella femmina il nuovo aumento dell'attività della MDH che si riscontra una quindicina di giorni dopo lo svezzamento potrebbe essere concomitante ad un aumento degli estrogeni, dato che Raghavan et al.(1982) hanno dimostrato che nella femmina lo svezzamento porta ad una scomparsa del tasso plasmatico ed ipofisario delle gonadotropine.

In conclusione, la MDH, enzima chiave del metabolismo ossidativo, è espressione nell'ipotalamo sia dell'attività anabolica prenatale e post-natale, sia di quella catabolica che si instaura con l'avanzare dell'età, per cui le sue modificazioni, da noi evidenziate, rispecchiano il ciclo biologico dell'animale.

Bibliografia

BERGER M., JEAN-FAUCHER Ch., De TURCKHEIM M., VEISSIERE C., JEAN Cl.(1975).Étude des androgènes testiculaires et plasmatiques chez le souris nouveau-né, immature, adulte et senescente.

ARCH. INT. PHYS. BIOCH.:83, 239-253.

BERRY,R.J.(1981)."Biology of the house mouse".(ed. by R.J.

- Berry). Academic Press, London.
- COHN P. e RICHTER D.(1956). Enzymic development and maturation of the hypothalamus.
J. NEUROCHEM.: 1, 166-172.
- DI MATTEO L., DEL MONACO G., CALIENDO M.F., VARRIALE B., SIMEOLI C., MILONE M.(1982). Crowding factors: a possible role on the population dynamics in the mouse.
BOLL. ZOOL.: 49, suppl. 49, 62.
- HAPPEN K.(1977). Sexual differentiation of the ovary. In "The ovary" (Eds Zuckerman e Weir). Academic Press, New York 69-112.
- KITTO G.B. and KAPLAN M.O.(1966). Purification and properties of chicken heart mitochondrial and supernatant malic dehydrogenase.
BIOCHEM. : 5, 3966-3968.
- LAMPARIELLO C., GRECO M., MILONE M.(1981). L'attività della β -glucuronidasi tessutale durante il ciclo estrale di Mus musculus domesticus.
RIF. MEDICA : 96, 3-4, 89-93.
- LOWRY O.H., ROSEBROUGH J.N., RANDALL J.R.(1951). Protein measurement in the Folin phenol reagent.
J. BIOL. CHEM.: 193, 265-270.
- LUINE V., KHYLCHESKYA R., McEWEN B.S.(1964). Oestrogen effects on brain and pituitary enzymes activity.
NEUROCHEMISTRY, 23, 925-930.

- MC EWEN B.S., LIEBERBURG I., MACLUŠKY U., PLAPINGER L.(1977).
Do estrogen receptors play a role in the sexual differentiation of the rat brain?
J. STER. BIOCHEM. : 8, 593-598.
- MILONE M., RASTOGI R.K., IELJA L.(1975). Cyclic changes in the enzyme activity in the hypothalamo-hypophyseal system of the frog, Rana esculenta,
GEN. COMP. ENDOCR.: 26, 107-114.
- MILONE M., GRECO M., CALIENDO M.F.(1978). L'attività della malato-deidrogenasi e della β -glucuronidasi nel sistema ipotalamo-ipofisario di maschi adulti di Mus musculus domesticus in diverse condizioni socio-sessuali,
BOLL. ZOOL.: 45, 34.
- MILONE M., DEL SORBO F., CORVINO A., CALIENDO M.F.; RASTOGI R.K. (1979a). Effetto temporale dell'acetato di ciproterone sulla attività della β -glucuronidasi e della malato deidrogenasi nell'ipotalamo di topo maschio adulto.
BOLL. ZOOL. :46, 298-299.
- MILONE M., DEL SORBO F., CORVINO A.(1979b). Isolamento, comportamento socio-sessuale e fertilità maschile.
BOLL. SOC. NATUR. NAPOLI: 88, 549-559.
- MILONE M., GRECO M., VARRIALE B., BASILE C.(1981), La malato deidrogenasi durante il ciclo estrale di Mus musculus domesticus.
REND. ACC. SCI. FIS. MAT., SER. II: 47, 123-130.
- RAGHAVAN V., SHETH P.R., NANDEDKAR T.D., SHETH A.R.(1982).
Effect of weaning on gonadotropin levels in plasma and pituitary of female mice.
IND. J. EXPTL. BIOL.:20, 252.
- ROODYN, D.B.(1967), The mitochondrion, In "Enzyme cytology".
D.B. Roodyn (ed), Acad. Press, London, 103-180.
- SELMANOFF M.K., GOLDMAN B.D., BENSON E.G.(1977). Developmental changes in serum LH, FSH and androgen levels in males of two inbred mouse strains.

ENDOCRINOLOGY : 100, 122-127.

VARRIALE B., FRAISSINET M., MILONE M., CHIEFFI G.(1983).

Behavioural and biochemical aspects of sexual differentiation in the mouse hypothalamus: effects of cyproterone acetate.

BOLL. ZOOL. : 50, 15-18.

VITO C.C., FOX T.O.(1982). Androgen and estrogen receptors in embryonic and neonatal rat brain.

DEVEL. BRAIN RES. : 2, 97-110.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci B. De Lerma, V. Leone, M. De Vincentiis.

TABELLA 1

ETA' (giorni)	PROTEINE ⁺		MALATO-DEIDROGENASI ⁺⁺	
	♂ ♂	♀ ♀	♂ ♂	♀ ♀
10 a.p.	104±8	103±8	634±86	628±55
7	105±8	105±7	1038±116	934±76
5	106±7	104±7	1228±134	1124±103
2	103±8	100±7	1382±136	1183±92
0	92±7	98±6	1306±112	1173±74
5 p.p.	78±5	72±5	1318±103	1160±88
10	63±5	66±5	755±59	541±34
15	54±4	57±4	328±23	211±18
20	49±5	43±4	206±20	184±20
25	44±4	46±4	218±20	193±22
30	46±3	42±4	223±19	206±19
35	45±3	45±5	201±24	197±17
40	43±4	40±5	198±22	258±24
45	42±4	43±4	204±20	286±26
50	43±4	39±4	209±16	342±30
55	44±4	34±4	200±17	398±29
60	44±3	34±4	192±18	380±31
65	40±3	33±3	205±23	384±33
70	42±3	35±4	211±22	379±26
75	39±3	33±3	206±24	391±34
80	43±3	32±3	201±26	388±39
85	42±3	32±3	210±26	382±31
90	44±3	32±3	205±28	387±28
120	40±3	33±3	188±33	375±41
150	39±3	32±3	184±27	377±39
180	41±3	34±2	179±26	384±44
210	38±3	32±2	120±22	382±47
240	39±2	33±3	106±20	374±48
270	39±3	33±3	90±18	378±50

+) Il contenuto proteico è espresso in µg/mg di tessuto fresco.

++) L'attività della malato-deidrogenasi è espressa in nM/µg di proteine/min.

Nota di Giuseppe Frigione *

Presentata dal Socio Prof. Riccardo Sersale

Adunanza del 3 marzo 1984

Riassunto

Si pone in luce la possibile utilizzazione delle loppe d'altoforno quali componenti delle miscele crude per clinker Portland, con vantaggio energetico e riduzione della polluzione atmosferica. I più favorevoli bilanci energetici si realizzano con l'impiego di loppe a basso o nullo valore idraulico quali le loppe degradate per accumulo su piazzale e le loppe cristalline quali i fondi di siviera, in quanto la loro macinabilità è più elevata rispetto a quella della loppa granulata ad elevata attività idraulica. Le caratteristiche meccaniche dei clinkers ottenuti dalle miscele con contenuti diversi di loppa e con diverso grado di vetrosità, sono uguali a quelle di un clinker ottenuto dalla miscela preparata senza l'impiego di loppa.

Abstract

Attention is brought to the possible utilization of slags as components in the raw mix for Portland cement, since they afford energy advantages and a lessening of atmospheric pollution. The best energy results, however, are obtained by using low or null hydraulic value slags, such as those which have deteriorated through being left on the slag heap, or crystalline slags, since their grindability is greater than that of high hydraulic active granulated slags. The strengths of clinkers from mixtures containing different slags and with various degree of vitreosity, are the same as those for a clinker made from a mixture prepared without the use of slags.

Introduzione

Una ragionevole ripartizione del fabbisogno di energia occorrente per la produzione del cemento Portland è riportata in Tabella 1 (1). Si nota che il processo di gran lunga energeticamente più dispendioso è quello di cottura della miscela cruda. Ne consegue che le opportunità di risparmio energetico nell'industria cementiera si dividono in due ampie categorie:

- produzione di cementi misti, in cui una porzione di cemento Portland è sostituita da materiali che non richiedono, per esser resi atti alla produzione di cemento, elevati consumi energetici;
- miglioramenti nel processo produttivo del clinker.

Il consumo di energia nella produzione del clinker è la risultante dei seguenti fattori:

- essiccazione delle materie prime,

* Dipartimento di Chimica dell'Università della Calabria - Arcavacata di Rende, Cosenza

Tabella 1 : Consumi energetici nella produzione del cemento Portland.

Fasi produttive	% del totale di energia impiegata
Preparazione miscela cruda:	
- estrazione e frantumazione	1,5
- essiccamento	4,5
- macinazione	4,3
Preparazione clinker:	
- energia elettrica	3,8
- combustibile	78,9
Macinazione clinker	
	7,0

- calore teorico della reazione di clinkerizzazione,
- perdite di calore attraverso le pareti del forno,
- uscite di gas e polveri calde,
- calore di raffreddamento del clinker.

Con opportuni perfezionamenti dell'impianto si possono ridurre al minimo tali "uscite" di energia. In genere, però, questi perfezionamenti presuppongono variazioni negli impianti che non sempre possono essere economicamente giustificate.

Possibili risparmi di energia possono essere ottenuti, senza eccessivo impiego di capitali per investimenti in nuovi impianti, sostituendo con prodotti di rifiuto e sottoprodotti, una parte dei

materiali impiegati per la produzione della miscela cruda. Fondamentalmente queste tecniche permettono di trarre vantaggio dell'energia precedentemente posta in questi materiali da altri cicli tecnologici.

Una delle più importanti caratteristiche energetiche legate alla produzione del clinker Portland è la reazione di dissociazione del calcare. Questa richiede circa 475 kcal/kg clinker, seguita dalla reazione di disidratazione dei minerali delle argille, circa 75 kcal/kg clinker. Poiché il calore finale teorico è circa 400 kcal/kg clinker, è evidente che la reazione fra CaO e componenti acidi, così come i successivi processi di cristallizzazione, generano calore. La loppa d'altoforno ha un elevato contenuto di calcio e può, in parte, sostituire il calcare con conseguente diminuzione del calore di formazione del clinker. Tale diminuzione, facilmente calcolabile in funzione del calcare e dell'argilla sostituita, può raggiungere le 150 kcal/kg clinker.

L'impiego della loppa nella miscela cruda provoca, inoltre, la riduzione della quantità di CO₂ negli effluenti gassosi. La produzione di una tonnellata di clinker, adoperando materiali tradizionali, libera infatti 0,5 tonnellate di CO₂, mentre adoperando loppa, 0,25 - 0,40 tonnellate. La diminuzione del volume di aeriformi causa minor velocità nei fumi, con conseguente minor quantitativo di polvere trascinata nell'atmosfera dai fumi stessi. La minor fuoriuscita di polvere, oltre che diminuire la polluzione atmosferica, provoca anche minori perdite di calore, sia perché la polvere è parzialmente calcinata, e si perde quindi il calore di reazione, sia perché va perduto il calore contenuto nella polvere. Inoltre la diminuzione del volume di aeriforme, riduce le perdite del calore contenuto nei fumi stessi.

Altro fattore energetico da tener presente riguarda i trasporti; il trasferimento

del calcare, ed in minor misura dell'argilla, non è conveniente poichè da 1 tonnellata di calcare si ottengono 0,56 tonnellate di clinker e da una di argilla se ne ottengono 0,90, la differenza essendo emessa con gli effluenti gassosi come CO_2 e, rispettivamente, acqua. Bisogna inoltre considerare l'influenza della sostituzione calcare-loppa sulla cinetica del processo di cottura, in quanto svolgendosi questo a temperature molto elevate, la cinetica influenza non solo la capacità produttiva dell'impianto ma anche le uscite di energia. All'uopo si consideri che il processo di cottura, nell'intervallo di temperatura 900-1450 °C, si svolge in due stadi. Nel primo, fra 900 e 1250 °C circa, si producono reazioni fra solidi e lo stadio lento, che determina la velocità, è rappresentato dalla diffusione del CaO nei granuli degli ossi di accettori, ioni silicati ed alluminati, provenienti dalla decomposizione termica dell'argilla. Nel secondo stadio, fra 1250 e 1450 °C circa, si producono reazioni in presenza di fase fusa ed il processo che condiziona la velocità è la diffusione del CaO e del neoformato C_2S in questa fase (2). Si può ipotizzare che sostituendo parte del calcare e dell'argilla con loppa d'altoforno, il processo lento di diffusione del primo stadio venga accelerato. Infatti nella loppa, sia vetrosa che cristallina, i gruppi acidi, anioni silicati ed alluminati, sono già a stretto contatto con parte degli ioni Ca^{++} (3).

La loppa granulata d'altoforno è impiegata nella produzione di cementi misti. Per produrre loppa granulata occorre un rapido raffreddamento della stessa con acqua, in peso 10 parti di acqua per ogni parte di loppa. L'acqua è in parte trattenuta: i valori di umidità variano dal 10 al 25%. La rimozione di questa umidità richiede un elevato dispendio di energia. Inoltre la loppa granulata richiede un costo di macinazione che può risultare superiore anche del 50% a quello necessario per ottenere il cemento Portland. Comunque, nonostante questi costi aggiuntivi, l'impiego della loppa granulata nei cementi misti porta a notevoli risparmi energetici nonchè alla produzione di un prodotto avente caratteristiche da renderlo consigliabile quando sono richiesti cementi con elevata resistenza ai solfati e non reattivi con inerti alcali - reattivi (4). Le loppe granulate sono, in genere, destinate prevalentemente alla produzione di cemento d'altoforno, perchè di limitato approvvigionamento a causa dell'attuale crisi siderurgica.

E' da notare, però, che una notevole quantità di loppa va persa, nei processi siderurgici, sotto forma di croste che sono lasciate nelle siviere quando la loppa è versata nelle vasche di granulazione. Questi fondi di siviera, essendo raffreddati lentamente, hanno struttura cristallina e pertanto non sono adoperabili quali aggiunte attive nei cementi, perchè prive di attività idrauliche. Ancora, notevoli quantitativi di loppa granulata non assorbiti dalle cementerie furono depositati, negli anni trascorsi, a rifiuto in grandi bacini. Tali loppe, che denomineremo stagionate, hanno perso, in parte, la loro attività idraulica per cui anche esse, come quelle cristalline, possono presentare un notevole interesse nell'industria cementiera quali componenti della miscela cruda, sostituendo parzialmente calcare ed argilla.

L'utilizzo di queste loppe, in alternativa a quelle granulate vetrose, è reso conveniente anche da aspetti energetici legati al trasporto ed alla macinazione. Per il trasporto si deve considerare che mentre le loppe granulate sono penalizzate da un contenuto di acqua

del 10-25%, le loppe stagionate e quelle fondi di siviera sono trasformate al 100% in clinker. Per quanto riguarda la macinazione, la macinabilità della loppa varia con le condizioni di raffreddamento o in funzione della struttura. Alcune loppe cristalline necessitano appena di macinazione in quanto, durante il lento raffreddamento, esse si autopolverizzano a causa del notevole aumento di volume conseguente alla formazione di γC_2S da βC_2S (5).

Nella presente ricerca ci si propone di verificare le variazioni di reattività indotte dall'introduzione di percentuali diverse di loppa in sostituzione di parte del calcare e argilla nelle miscele crude, nonché di valutare l'influenza dell'instabilità termodinamica delle loppe vetrose sulla cinetica di clinkerizzazione delle miscele crude con esse preparate.

Ci si propone altresì di verificare la variazione della macinabilità delle loppe in funzione delle diversità strutturali e l'influenza dell'impiego delle varie loppe sulle caratteristiche tecnologiche dei clinkers prodotti.

Materiali

Le miscele crude impiegate nelle prove di cottura sono state preparate in laboratorio. Esse sono state ottenute trattando in un miscelatore per polveri calcare, argilla, ceneri di pirite ed eventualmente loppa granulata di fresco, loppa degradata per permanenza su piazzale, in cumulo, per due anni o loppa cristallina fondo di siviera. La miscelazione è durata fin tanto che ogni miscela presentava una deviazione standard, calcolata su 10 valori della perdita al fuoco, minore dello 0,5% (6). La composizione chimica dei componenti impiegati è riportata in Tabella 2.

Tabella 2 : Composizione dei componenti le miscele crude (% in peso).

	Calcare	Argilla	Ceneri Pirite	Loppa granulata	Loppa stagionata	Loppa siviera
p.a.f.	43,81	13,05	0,40	0,26	0,40	0,15
SiO ₂	0,33	55,04	4,31	34,06	33,10	33,58
Al ₂ O ₃	0,09	16,08	2,24	9,96	9,83	10,25
Fe ₂ O ₃	0,22	6,02	87,39	1,89	1,95	2,68
CaO	54,76	5,96	1,80	46,44	46,20	45,46
MgO	0,60	1,02	0,50	5,46	6,70	6,12
Mn ₃ O ₄	-	-	0,12	0,31	0,35	0,46
Na ₂ O	0,02	1,76	0,06	0,32	0,20	0,04
K ₂ O	0,04	0,84	0,08	0,34	0,20	0,08
S	-	-	-	0,70	0,80	-
SO ₃	-	-	3,02	-	-	0,96

I componenti sono stati macinati separatamente tutti ad una finezza simile a quella di miscele crude industriali. Le loro distribuzioni granulometriche, determinate con vagli a getto d'aria Alpine, sono riportate in Tabella 3.

Tabella 3: Distribuzione granulometrica dei componenti delle miscele crude.

MATERIALE	Residui (%) su vaglio con maglia da μm				
	200	125	90	63	40
Calcere	2,5	9,1	19,2	32,8	43,4
Argilla	1,0	9,1	19,6	30,5	40,1
Ceneri pirite	1,8	10,2	18,6	33,1	43,5
Loppa granulata	2,0	10,2	20,8	31,6	45,8
Loppa stagionata	2,4	9,1	19,9	32,6	43,4
Loppa siviera	1,9	9,6	18,4	33,2	43,7

La miscela cruda costituita da solo calcare, argilla e ceneri di pirite, è stata assunta quale termine di paragone. Le altre miscele sono state preparate sostituendo parte del calcare e dell'argilla con il 10, 20 e 30 % rispettivamente di ciascuno dei tre tipi di loppa. Le dieci miscele crude presentano la pratica consistenza di tutti i fattori chimici che possono influen-

zare il comportamento alla cottura (7), e cioè:

CaO standard	uguale a	$94,5\% \pm 0,5$
Modulo silicico	uguale a	$2,18 \pm 0,3$
Modulo fondenti	uguale a	$1,79 \pm 0,3$

Le percentuali dei componenti nelle miscele crude sono riportate in Tabella 4.

Tabella 4: Percentuali in peso dei componenti nelle miscele crude.

Miscela:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Calcere	75,3	70,3	65,3	60,3	70,4	65,4	60,5	70,2	65,1	60,0
Argilla	24,0	18,8	13,5	8,3	18,5	13,5	8,3	18,9	13,7	8,6
Ceneri pirite	0,7	0,9	1,2	1,4	0,8	1,1	1,2	0,9	1,2	1,4
Loppa granulata	-	10,0	20,0	30,0	-	-	-	-	-	-
Loppa stagionata	-	-	-	-	10,0	20,0	30,0	-	-	-
Loppa siviera	-	-	-	-	-	-	-	10,0	20,0	30,0

Il grado di vetrosità delle loppe impiegate è stata posta in evidenza mediante diffrazione dei raggi X. Dai diffrattogrammi, riportati in figura 1, si osserva il completo stato di vetrificazione della loppa granulata di fresco e l'elevata cristallinità della loppa fondo di siviera, mentre la loppa stagionata mostra un grado di vetrosità intermedio.

Il grado di vetrosità delle loppe è stato anche valutato attraverso la misura del calore di devetrificazione, ricavato per differenza fra i calori di soluzione, in opportuna miscela solvente ($\text{HNO}_3 + \text{HF}$), della loppa in esame e della medesima loppa stabilizzata, cioè totalmente devetrificata, a mezzo di conveniente trattamento termico (5) (8). I valori misurati sono riportati in Tabella 5.

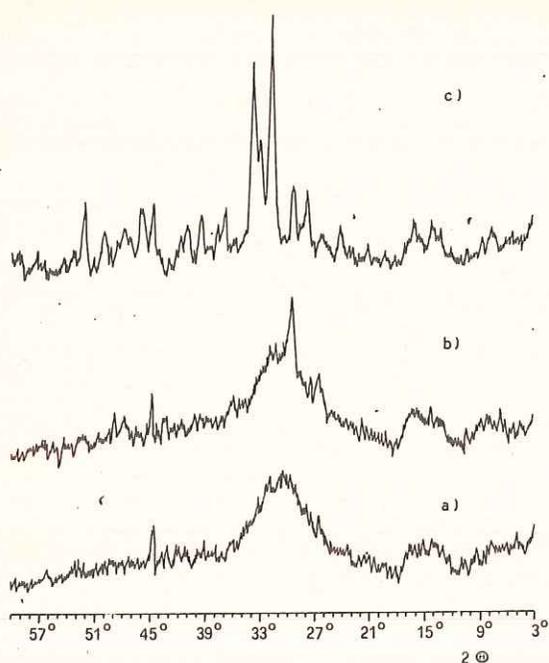


Fig. 1:

Diffratogrammi delle loppe:
 a) loppa granulata di fresco
 b) loppa stagionata
 c) loppa fondo di siviera.

Tabella 5: Calori di devettrificazione delle loppe impiegate.

	cal / g
Loppa granulata	50
Loppa stagionata	24
Loppa siviera	2

Metodi di prova

Reattività delle miscele crude

L'andamento della combinazione dell'ossido di calcio rappresenta un indice adatto a caratterizzare la reattività, definita quale velocità di reazione delle miscele crude, alla temperatura a cui queste reazioni terminano, in un periodo di tempo stabilito (9). Per seguire questo andamento, in dipendenza della temperatura di cottura, le miscele crude sono state formate in "pellets" di 15 mm di diametro e circa 7 mm di altezza con una pressione di 1,5 ton/cm². I pellets, posti in un crogiuolo di platino, sono stati dapprima calcinati per 15 minuti a 950 °C in un fornello elettrico e poi cotti, sempre in fornello elettrico, a temperature differenti tra 1000 e 1450 °C. Dopo 60 minuti di cottura il crogiuolo contenente i pellets, tirato fuori dal forno, è stato raffreddato in aria. Successivamente i pellets sono stati macinati al fine di determinare, mediante il metodo di Franke modificato, il contenuto di CaO non combinato (calce libera).

Macinabilità dei componenti

Le loppe ed il calcare impiegati per la preparazione delle miscele crude sono stati provati, per quanto riguarda la loro macinabilità, adoperando l'apparecchiatura messa a punto da Zeisel (10), le cui modalità operative sono descritte da Lehmann e Haese (11). Le condizioni sono state:

- Anello di macinazione caricato con un peso di

kg 20

- Giri dell'anello di macinazione	p.m. 200
- Dimensione del materiale alimentato	da mm 0,75 a 1,00
- Quantità di materiale alimentato	g 30

Le prove sono state condotte macinando un campione del materiale, rinnovato di volta in volta, per tempi differenti, tra 3 e 12 minuti, e misurando la finezza raggiunta mediante la determinazione dei residui, su stacci da 125 μm , 90 μm , 60 μm e 40 μm , con un setacciatore a getto d'aria Alpine. Allo scopo di evitare, o comunque per ridurre, l'agglomerazione delle particelle di calcare, la prova di macinabilità di questo materiale è stata effettuata aggiungendo ad esso l'1% di nerofumo. Sempre a causa dell'agglomerazione, le analisi granulometriche sono state limitate agli stacci 125 μm e 90 μm .

Caratteristiche meccaniche

Le miscele crude, formate in pellets di 5 cm di diametro e circa 1 cm di altezza sotto una pressione di 1,5 ton/cm², sono state riscaldate per 1 ora a 900 °C e poi cotte, sempre in forno elettrico, a 1450 °C. Successivamente i pellets sono stati raffreddati, con idonea apparecchiatura, in aria così da abbassarne la temperatura a 100 °C in 15 minuti. La cottura è stata prolungata per il tempo necessario a portare la CaO libera del clinker prodotto ad un valore di 0,80 ± 0,20 %.

I clinker così ottenuti, addizionati di gesso in modo da portare il contenuto totale di SO₃ a 2,70 %, sono stati macinati in mulinetto da laboratorio ad una superficie specifica Blaine di 3800 ± 50 cm²/g. Sui cementi così preparati sono stati determinati i tempi di inizio e fine presa nonché i valori di resistenza a compressione in accordo con la Normativa italiana (12).

Risultati e discussione

Reattività delle miscele crude

Nelle condizioni sperimentali prescelte, e con reazioni di clinkerizzazione condotte a tempi costanti, i valori della calce libera, in funzione della temperatura di cottura, si dispongono su una curva che segue una funzione esponenziale del tipo (13):

$$\text{Calce libera} = e^{a+bt} \quad \text{dove:}$$

\underline{a} e \underline{b} sono costanti che hanno valori differenti a seconda che la reazione avvenga in fase solida, tra circa 950 e 1250 °C o in presenza di fase fusa, tra circa 1250 e 1450 °C,

t è la temperatura di trattamento.

Riportando i valori di CaO libera sull'asse delle ordinate, in scala logaritmica, in funzione della temperatura di cottura - sulle ascisse -, si ottengono due semirette i cui valori di intercette con l'asse delle Y ed il coefficiente angolare rappresentano, rispettivamente, \underline{a} e \underline{b} per i due intervalli di temperatura.

I valori di \underline{a} e \underline{b} (a_1, b_1 e a_2, b_2 rispettivamente se riferiti allo stadio delle reazioni che si svolgono fra solidi o a quelle che si svolgono in presenza di fase fusa) sono riportati in Tabella 6 per le varie miscele. L'esame dei risultati mostra che l'introduzione di loppa nella miscela cruda innalza i valori assoluti delle costanti \underline{a} e \underline{b} , essenzialmente e

Tabella 6 : Valori delle costanti \underline{a} e \underline{b} per le varie miscele.

Miscela	a_1	b_1	a_2	b_2
1	5,42	-0,0018	2,19	-0,0095
2	6,43	-0,0026	2,22	-0,0095
3	7,00	-0,0032	2,23	-0,0096
4	7,55	-0,0039	2,31	-0,0096
5	6,40	-0,0026	2,22	-0,0095
6	6,99	-0,0032	2,25	-0,0096
7	7,60	-0,0039	2,29	-0,0096
8	6,42	-0,0026	2,21	-0,0095
9	7,03	-0,0032	2,25	-0,0095
10	7,59	-0,0038	2,30	-0,0096

prevalentemente nel 1° stadio, denunciando quindi un incremento di reattività delle miscele stesse. Nel secondo stadio, i valori a_2 e b_2 risultano solo leggermente incrementati, mostrando assai piccoli innalzamenti della reattività. I valori delle costanti crescono sempre all'aumentare del contenuto di loppa nella miscela. La natura fisica delle loppe adoperate non esercita, invece, alcuna influenza sulla reattività delle miscele: i valori di \underline{a} e \underline{b} sono infatti uguali, nei limiti degli errori sperimentali, sia che si adoperi loppa granulata di fresco, sia loppa più o meno cristallina.

Macinabilità dei componenti

In figura 2 sono riportate le curve di macinabilità: consumo energetico in kwh/ton in funzione dei residui percentuali su prefissati stacci. Si nota che la loppa stagionata e quella cristallina di siviera denunciano

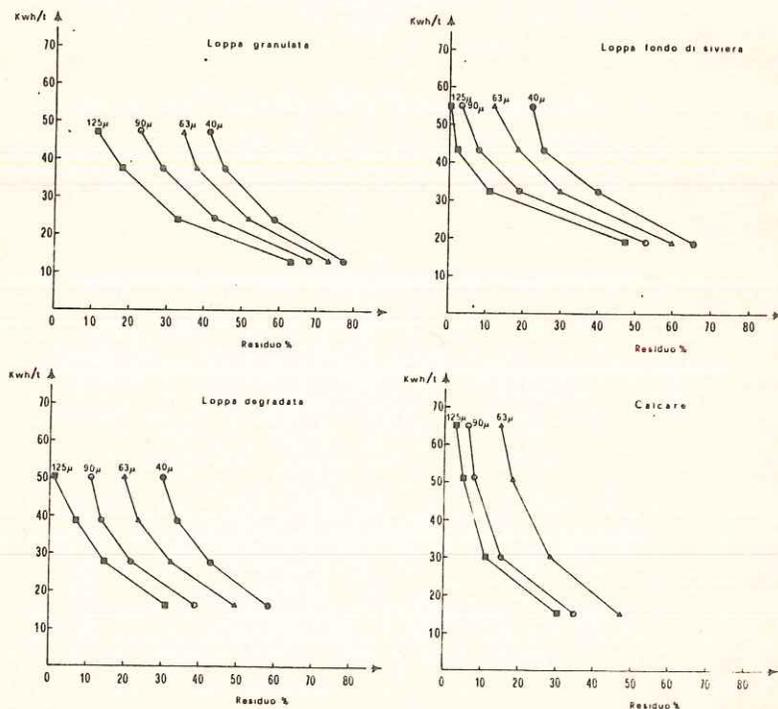


Figura 2 :
Macinabilità dei componenti.

macinabilità comparabili: in particolare la prima è macinabile con minor consumo energetico a bassi valori di finezza cioè alti residui. Per alti valori di finezza, invece, la loppa cristallina richiede un minor consumo energetico. La loppa granulata di fresco richiede, al contrario, sempre da 10 a 15 kwh/ton in più per ottenere i medesimi valori di finezza. Il calcare impiegato in questa sperimentazione ha denunziato un comportamento alla macinazione molto simile a quello della loppa stagionata.

Da quanto esposto risalta nettamente che, a parità di finezza delle miscele crude, la sostituzione di parte di calcare con loppa degradata o cristallina non comporta aggravii di costi di macinazione, mentre, qualora si adoperi loppa granulata di fresco, è necessario sottrarre dal beneficio energetico ottenuto nel processo di cottura, la maggiore spesa per la macinazione.

Caratteristiche meccaniche

I risultati delle prove di presa e di resistenza a compressione, effettuate sulle

Tabella 7: Caratteristiche meccaniche dei cementi prodotti dai vari clinkers.

Miscele	Presa		Resistenza a compressione	
	Inizio h min	Fine h min	2 giorni kg/cm ²	28 giorni kg/cm ²
1	2 10	3 30	230	540
2	2 15	3 40	220	550
3	2 10	3 30	218	542
4	2 10	3 35	228	536
5	2 05	3 30	236	544
6	2 10	3 40	230	552
7	2 15	3 55	228	528
8	2 05	3 30	224	538
9	2 00	3 20	218	540
10	2 15	3 30	240	550

paste e malte confezionate con i cementi provenienti dai vari clinkers, sono riportati in Tabella 7. Si nota che non vi è alcuna differenza fra le varie miscele provate. Si può concludere, perciò, che la sostituzione di parte del calcare con loppa, qualsiasi sia il suo grado di vetrosità, non ha influenza sulle caratteristiche meccaniche dei cementi prodotti con i vari clinkers.

Conclusioni

Le reazioni di clinkerizzazione sono favorite se, in parziale sostituzione del calcare, quale fonte di ossido di calcio, si adoperi loppa di altoforno. La cinetica di reazione, e cioè la velocità della combinazione dell'ossido di calcio con i componenti acidi della miscela cruda, è accelerata in

funzione della quantità di loppa aggiunta. In particolare l'aggiunta di loppa influenza le reazioni di clinkerizzazione che avvengono in fase solida. L'aggiunta di loppa, oltre un risparmio energetico termodinamico, rende quindi anche un vantaggio cinetico: quest'ultimo è comunque difficilmente quantizzabile in quanto dipendente anche dalle caratteristiche dell'impianto di cottura.

Mentre il grado di vetrosità è di fondamentale importanza per l'attività idraulica delle loppe, la reattività delle miscele crude è indipendente dal grado di vetrosità delle loppe, per cui è possibile l'impiego di loppe aventi attività idraulica ridotta, per lunga

permanenza a piazzale, o attività idraulica nulla come le loppe fondo di siviera.

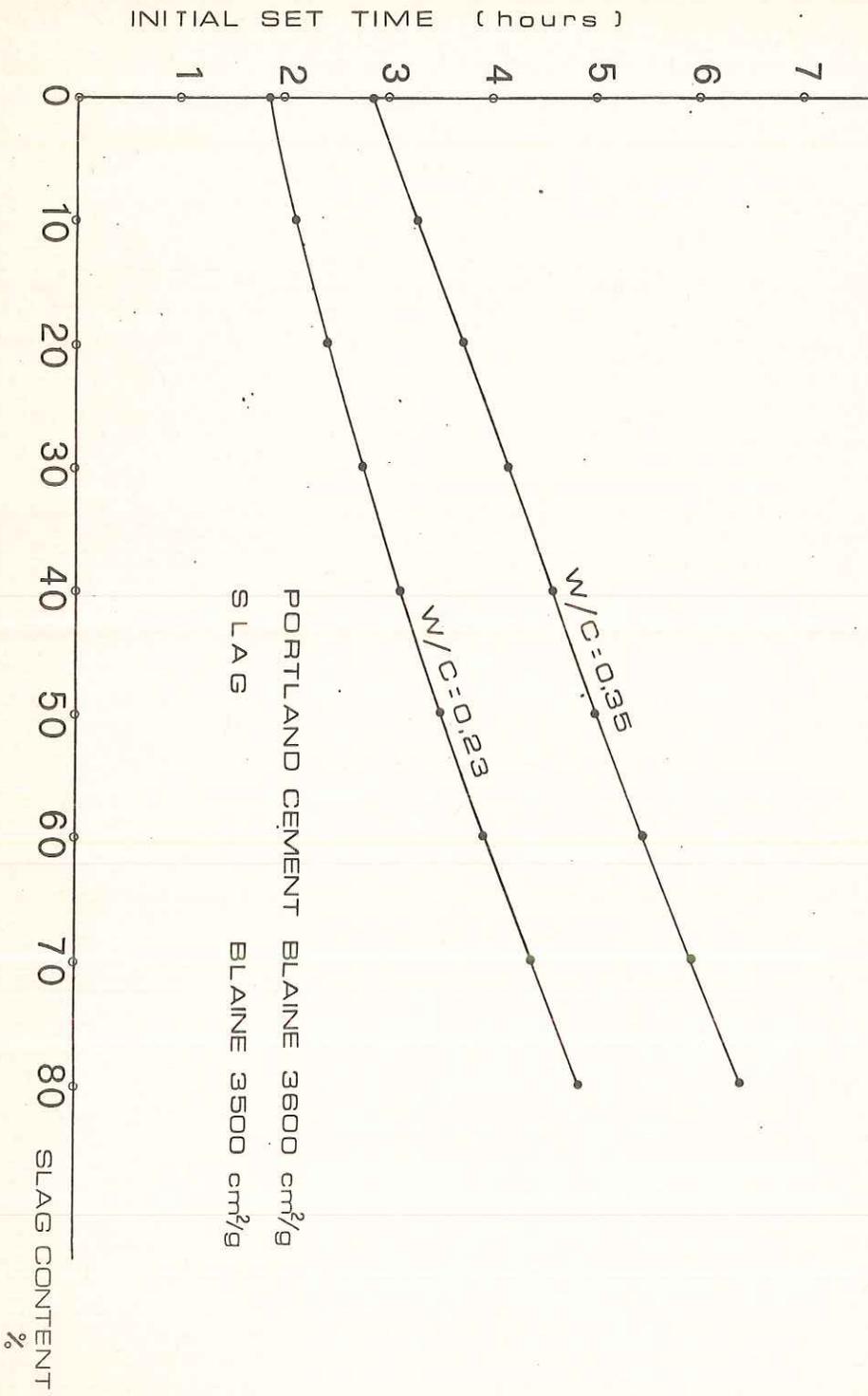
Questi ultimi due tipi di loppa presentano il vantaggio di una macinabilità più elevata rispetto alla loppa granulata e dello stesso ordine di grandezza della macinabilità del calcare.

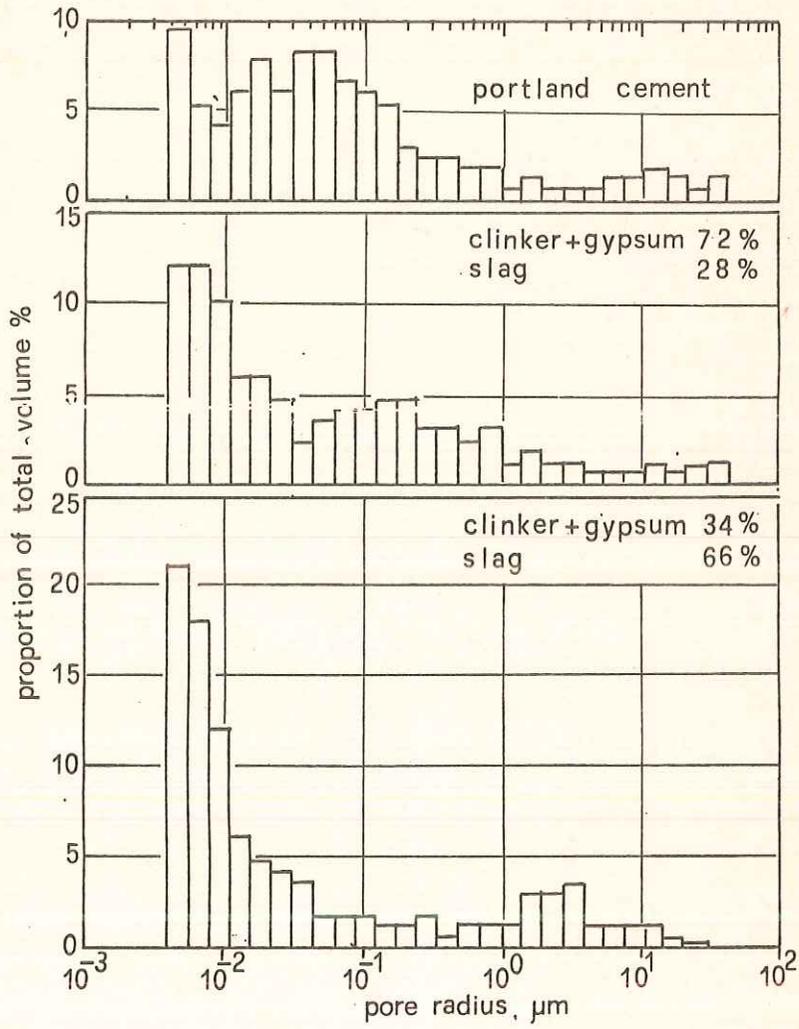
E' da notare ancora che le prove meccaniche, condotte sui cementi ottenuti dai clinkers preparati dalle miscele crude in esame, mostrano valori che sono indipendenti sia dal contenuto di loppa della miscela cruda e sia dal grado di vetrosità.

Bibliografia

1. Portland Cement Association: "Energy Conservation in the Cement Industry" Conservation Paper N. 29 - Federal Energy Administration, Washington D.C. U.S.A. (1975).
2. Seidel G., Huckauf H., Stark J.: "Technologie des ciments, chaux, plâtre". Editions Septima, Paris (1980).
3. Sersale R.: "Aspects of the Chemistry of Additions" in Advances in Cement Technology, Ed. S.N.Ghosh, p 537, Pergamon Press, Oxford (1983).
4. Cattaneo A., Frigione G.: "Performance of Blast Furnace Slag Cement", Cement Concrete and Aggregates, Vol. 5, N. 1, June 1983, pp 42-46.
5. Malquori G., Sersale R., Gregorio E.: "Il rilevamento del valore idraulico delle loppe di altoforno". Industria Italiana Cemento, XXI, 232 (1951) e 256 (1951).
6. Alimmary S.A. and Tamás F.D.: "Burnability of cement raw materials at rapid calcination conditions", Cement and Concrete Research, 10, 739 (1980).
7. Abdul-Maula S. and Odler I.: "Effect of oxidic composition on Portland cement raw meal burnability", World Cement Technology, 11, 330 (1980).
8. Sersale R., Frigione G.: "Reattività verso il gesso da parte delle scorie d'altoforno. Influenza del grado di vetrosità della scoria". Convegno ASM I, Milano (1983).
9. Teoreanu I., Dulamescu D.: "Considerazioni cinetiche sul comportamento alla clinkerizzazione delle miscele crude di clinker di cemento Portland", Il Cemento, 78, 183 (1981).
10. Zeisel H.G.: "Entwicklung eines Verfahrens zur Bestimmung der Mahlbarkeit", Dissertation T H Aachen (1952). Schriftenreihe der Zementindustrie H. 4, V.D.Z. Dusseldorf (1953).
11. Lehmann H., Haese U.: "Der Mahlbarkeitsprüfer, ein Gerät zur Untersuchung der Mahleigenschaften Harter Stoffe", Tonindustrie Zeitung 79, 91 (1955).
12. Decreto Ministeriale 3 giugno 1968: Norme sui requisiti di accettazione e modalità di prova dei cementi. Gazzetta Ufficiale n. 180 del 17 luglio 1968.
13. Bucchi R.: "Influence de la nature et de la préparation des matières premières sur la réactivité des crus". 7e Congrès International de la Chimie des Ciments, Vol. I, p 1-1/3, Paris, Ed. Septima (1980).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, R. Sersale, P. Corradini.





SU UN TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE ALLA LEBESGUE
PER TOPOLOGIE SU ANELLI DI INSIEMI.

Nota di Achille Basile *,
Presentata dal Socio Prof. Carlo Ciliberto.
Adunanza del 7/4/1984 .

Riassunto

Si fornisce una dimostrazione diretta del teorema di decomposizione alla Lebesgue per topologie di Frèchet-Nikodym.

Abstract

A direct proof of the Lebesgue decomposition theorem for Frèchet-Nikodym topologies is given.

Nel 1973 L.DREWNOWSKI [2] pose il problema seguente : per una topologia di Frèchet-Nikodym esaustiva su un anello \underline{R} di parti di un insieme Ω , vale un teorema di decomposizione in una parte " singolare " e una " continua " rispetto ad un'altra preassegnata topologia di Frèchet-Nikodym ?

Nel 1976 T. TRAYNOR [3] rispose affermativamente, traendo il risultato da un teorema di decomposizione per funzioni finitamente additive.

In questa nota si dà una soluzione del problema di Drewnowski senza fare ricorso al citato teorema di Traynor sulle funzioni finitamente additive, ma con metodi legati solo alla struttura dell'insieme delle topologie di Frèchet-Nikodym su \underline{R} .

Recentemente anche H. WEBER [5] ha stabilito un teorema di decomposizione analogo a quello enunciato nel n.2, tuttavia la dimostrazione qui esposta, diversa da quella di Weber, sembra essere notevolmente più semplice.

1. Sia Ω un insieme non vuoto e \underline{R} un anello, rispetto alla differenza simmetrica e all'intersezione, di parti di Ω .

Se $(\Gamma_i)_{i \in I}$ è una famiglia di topologie su \underline{R} , con $\bigvee_{i \in I} \Gamma_i$ e $\bigwedge_{i \in I} \Gamma_i$

* Dip.to di Matematica e Applicazioni " R.Caccioppoli " Univ. di Napoli
lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

ne indichiamo rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore rispetto alla relazione di inclusione. Una topologia Γ su \underline{R} si dice esauritiva se ogni successione disgiunta $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \underline{R} Γ -converge al ϕ .

Una topologia su \underline{R} si dice di Fréchet-Nikodym se rende continua la differenza simmetrica e uniformemente continua l'intersezione. Qui, per brevità, lo insieme delle topologie di Fréchet-Nikodym su \underline{R} sarà indicato con $FN(\underline{R})$.

E' noto [2] che $FN(\underline{R})$, ordinato per inclusione, è un reticolo completo dotato di minimo $\{\phi, \underline{R}\}$ e di massimo $P(\underline{R})$ che indicheremo con 0 e 1 rispettivamente.

Sia η una submisura definita in \underline{R} , cioè sia $\eta: \underline{R} \rightarrow [0, \infty]$ crescente, finitamente subadditiva e con $\eta(\phi) = 0$; con $\Gamma(\eta)$ indichiamo la meno fine fra le topologie di $FN(\underline{R})$ che rendono continua η . Ogni elemento di $FN(\underline{R})$ è generato da una famiglia di submisure su \underline{R} nel senso che, se $\Gamma \in FN(\underline{R})$, esiste [1] una famiglia C - diretta dalla usuale relazione \leq tra funzioni numeriche - di submisure definite in \underline{R} tale che $\Gamma = \bigvee_{\eta \in C} \Gamma(\eta)$. Si ha quindi che, se Γ_1 e Γ_2 sono due elementi di $FN(\underline{R})$ e si pone $\Gamma_1 = \bigvee_{\eta \in C_1} \Gamma(\eta)$ e $\Gamma_2 = \bigvee_{\eta \in C_2} \Gamma(\eta)$,

$$\Gamma_1 \wedge \Gamma_2 = \bigvee_{(\eta_1, \eta_2) \in C_1 \times C_2} (\Gamma(\eta_1) \wedge \Gamma(\eta_2)) \quad \Gamma(\eta_1) \wedge \Gamma(\eta_2) = \Gamma(\eta_1 \wedge \eta_2)$$

dove $\eta_1 \wedge \eta_2$ è la submisura su \underline{R} così definita:

$$\eta_1 \wedge \eta_2(X) = \inf_{F \in \underline{R} | X} (\eta_1(F) + \eta_2(X - F)), \quad \underline{R} | X = \{F \in \underline{R} : F \leq X\}.$$

Se $\Gamma \in FN(\underline{R})$, una Γ -base locale di ϕ si dice normale se per ogni suo elemento ω si ha: $E \in \omega$ e $X \in \underline{R} | E \Rightarrow X \in \omega$.

Esiste almeno una Γ -base locale normale di ϕ . Il simbolo $\beta(\Gamma)$ denoterà una Γ -base locale normale di ϕ .

(1.1) $FN(\underline{R})$ è un reticolo distributivo completo.

Dim.

Dato che in un reticolo le due leggi distributive sono equivalenti, ci si può limitare a dimostrare che, per ogni scelta di Γ, Γ_1 e Γ_2 in $FN(\underline{R})$, $\Gamma \wedge (\Gamma_1 \vee \Gamma_2) = (\Gamma \wedge \Gamma_1) \vee (\Gamma \wedge \Gamma_2)$.

Secondo quanto precedentemente richiamato, si scrive $\Gamma = \bigvee_{\eta \in C} \Gamma(\eta)$ e $\Gamma_i = \bigvee_{\eta_i \in C_i} \Gamma(\eta_i)$ $i=1,2$. Risultando $\Gamma(\eta_1) \vee \Gamma(\eta_2) = \Gamma(\eta_1 + \eta_2)$ e $\Gamma_1 \vee \Gamma_2 = \bigvee_{(\eta_1, \eta_2) \in C_1 \times C_2} (\Gamma(\eta_1) \vee \Gamma(\eta_2))$ si ha

$$\Gamma \wedge (\Gamma_1 \vee \Gamma_2) = \bigvee_{(\eta, \eta_1, \eta_2) \in C \times C_1 \times C_2} (\Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_1 + \eta_2)).$$

Ma $\Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_1 + \eta_2) = (\Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_1)) \vee (\Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_2))$. Infatti essendo ovvia l'inclusione \supseteq , l'altra segue dal fatto che una submisura contemporaneamente continua rispetto a $\Gamma(\eta)$ e a $\Gamma(\eta_1) \vee \Gamma(\eta_2)$ è anche continua rispetto a $\Gamma(\eta \wedge \eta_1) \vee \Gamma(\eta \wedge \eta_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Dunque : } \Gamma \wedge (\Gamma_1 \vee \Gamma_2) &= \bigvee_{(\eta, \eta_1, \eta_2) \in C \times C_1 \times C_2} ((\Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_1)) \vee (\Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_2))) = \\ &= \left(\bigvee_{(\eta, \eta_1) \in C \times C_1} \Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_1) \right) \vee \left(\bigvee_{(\eta, \eta_2) \in C \times C_2} \Gamma(\eta) \wedge \Gamma(\eta_2) \right) = (\Gamma \wedge \Gamma_1) \vee (\Gamma \wedge \Gamma_2). \end{aligned}$$

2. Siano Γ_1 e $\Gamma_2 \in \text{FN}(\underline{R})$. Si dice che Γ_1 è singolare rispetto a Γ_2 , e si scrive $\Gamma_1 \perp \Gamma_2$, quando: $\forall \omega_1 \in \beta(\Gamma_1)$ e $\forall \omega_2 \in \beta(\Gamma_2)$ $\exists A \in \underline{R}$ tale che $A \in \omega_2$ e $\underline{R} \setminus A \in \omega_1$.

Risulta, [2] e [3], che $\Gamma_1 \perp \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_1 \wedge \Gamma_2 = 0$ ed è vera anche l'implicazione inversa se \underline{R} è un'algebra o se Γ_1 è esaustiva.

(2.1) Se $\Gamma \in \text{FN}(\underline{R})$ e $(\Gamma_i)_{i \in I}$ è una parte di $\text{FN}(\underline{R})$ con $\Gamma_i \perp \Gamma \quad \forall i \in I$, allora $\bigvee_{i \in I} \Gamma_i \perp \Gamma$.

Dim.

Poniamo $\Gamma_0 = \bigvee_{i \in I} \Gamma_i$. Siano: $\omega^0 \in \beta(\Gamma_0)$ e $\omega \in \beta(\Gamma)$. È possibile determinare $i_1, \dots, i_m \in I$ in modo che $\omega^{i_1} \cap \dots \cap \omega^{i_m} \subseteq \omega^0$ dove $\omega^{i_j} \in \beta(\Gamma_{i_j})$. D'altra parte in corrispondenza di ω si trova $\nu \in \beta(\Gamma)$ tale che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \nu \subseteq \omega$.

Poiché Γ_{i_j} è singolare rispetto a Γ , esiste in \underline{R} , per ogni $j=1, \dots, m$, X_j tale che $X_j \in \nu$ e $\underline{R} \setminus X_j \subseteq \omega^{i_j}$. Posto $A = \bigcup_{j=1}^m X_j$, si ha $A \in \omega$ e $\underline{R} \setminus A \subseteq \omega^0$.

Quanto appena provato ci consente di introdurre, per ogni $\Gamma \in \text{FN}(\underline{R})$, la topologia $\Gamma^\perp = \max\{\Gamma' \in \text{FN}(\underline{R}) : \Gamma' \perp \Gamma\}$.

Lemma. Se $\Gamma \in \Gamma' \in \text{FN}(\underline{R})$, con Γ' esaustiva, e se $\Gamma' \wedge \Gamma^\perp = 0$, allora $\Gamma' \leq \Gamma$.

Dim.

Per assurdo sia $\Gamma' \not\leq \Gamma$. Segue l'esistenza di una rete $\xi = (E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ di elementi di \underline{R} la quale Γ -converge a ϕ e non Γ' -converge a ϕ . Per ogni $\omega \in \beta(\Gamma')$, sia

$$s(\omega) = \{X \in \underline{R} : \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ tale che } \forall \lambda \geq \lambda_0 \text{ si ha } E_\lambda \wedge X \in \omega\}.$$

$(s(\omega))_{\omega \in \beta(\Gamma')}$ è una base di filtro normale su \underline{R} e, inoltre, si ha che $s(\omega) \supseteq s(\omega_1) \cup s(\omega_2)$ se $\omega_1 \cup \omega_2 \subseteq \omega$. Dunque, [1], sia $\Gamma(\xi)$ la topologia di Fréchet-Nikodym su \underline{R} che ammette $(s(\omega))_{\omega \in \beta(\Gamma')}$ come base locale normale in ϕ .

Da $s(\omega) \supseteq \omega \quad \forall \omega \in \beta(\Gamma')$, segue (*) $\Gamma'(\xi) \leq \Gamma'$. Risulta anche (**) $\Gamma'(\xi) \wedge \Gamma = 0$ e per dimostrarlo ci serviamo della seguente circostanza:

$$(*) \quad B \in \underline{R} \setminus s(\omega) \Rightarrow \left(\forall \nu \in \beta(\Gamma) \quad \exists B' \in \underline{R} \setminus B : B' \in \nu \right).$$

Supposto (**) falso, esistono $s(\omega) \in \beta(\Gamma'(\xi))$ e $\nu \in \beta(\Gamma)$ tali che $X \in \nu \Rightarrow \underline{R} \setminus X \notin s(\omega)$;

† se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono classi di parti di Ω , per evitare confusioni, scriviamo $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ per indicare $\{X \in \Omega : X = A \cup B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

mediante (+) si costruisce una successione disgiunta A_0, \dots, A_n, \dots di elementi di \underline{R} con $A_i \not\subseteq \omega \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$ e, evidentemente, si contraddice l'esaustività di Γ' .

La costruzione di $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ può realizzarsi per induzione come segue. In corrispondenza di v sia $(v_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ una successione in $\beta(\Gamma)$ tale che $\forall n$ si abbia $v_0 \delta \dots \delta v_n \in v$. $\phi \in v \Rightarrow \underline{R} \not\subseteq \omega$ e per (+) abbiamo A_0 con $A_0 \not\subseteq \omega$ e $A_0 \in v_0$.

Costruiti A_0, \dots, A_n disgiunti a coppie e con $A_i \in v_i - \omega \quad \forall i=0, \dots, n$, si ha $-B = \bigcup_{i=0}^n A_i \in v \Rightarrow \underline{R} \not\subseteq \omega$ e usando (+) si ha $A_{n+1} \in \underline{R} \setminus B$ con $A_{n+1} \in v_{n+1} - \omega$.

Ora, in virtù delle acquisite (*) e (**), si ha $\Gamma(\xi) \subseteq \Gamma^+$ da cui $\Gamma(\xi) \wedge \Gamma^+ = 0$ e segue $\Gamma(\xi) = 0$. Da ciò possiamo ricavare che $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{\Gamma^+} \phi$, in contraddizione con la scelta di ξ . Invero $E_\lambda \xrightarrow{\Gamma^+} \phi$ si otterrebbe subito se \underline{R} fosse un'algebra, mentre in generale si può ottenere il risultato facendo ricorso, come segue, al cosiddetto "principio di esaustione" [1].

Scriviamo $\Gamma^+ = \bigvee_{\eta \in C'} \Gamma(\eta)$ e prendiamo $\eta \in C'$. Essendo η esaustiva, cioè $\Gamma(\eta)$ esaustiva, il citato principio comporta che esista in \underline{R} una successione crescente $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che si abbia $\lim_{n \in \mathbb{N}} \eta(E - M_n) = 0$ uniformemente rispetto a $E \in \underline{R}$. Allo scopo di ottenere che $\eta(E_\lambda) > 0$, sia $\delta > 0$. Chiaramente si trova $h \in \mathbb{N}$ tale che $\eta(E - M_h) < \delta \quad \forall E \in \underline{R}$ per cui $\eta(E_\lambda) \leq \delta + \eta(E_\lambda \wedge M_h) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Ma $(E_\lambda \wedge M_h)_{\lambda \in \Lambda} \xrightarrow{\Gamma^+} \phi$ da cui $\lim_{\lambda \in \Lambda} \eta(E_\lambda \wedge M_h) = 0$ e l'asserita convergenza a zero di $\eta(E_\lambda)$.

Per concludere che $E_\lambda \xrightarrow{\Gamma^+} \phi$ basta l'osservazione che una base locale normale in ϕ secondo Γ^+ è $\{\omega_{\delta, \eta} : \delta > 0, \eta \in C'\}$ dove $\omega_{\delta, \eta} = \{X \in \underline{R} : \eta(X) \leq \delta\}$.

(2.2) Se $\Gamma' \in FN(\underline{R})$ ed è esaustiva, allora l'insieme $\phi = \{\Gamma \in FN(\underline{R}) : \Gamma \subseteq \Gamma'\}$ è un reticolo booleano.

Dim.

ϕ è un reticolo distributivo con 0 minimo. Posto, se $\Gamma \in \phi$, $\Gamma^* = \max\{\tau \in \phi : \Gamma \wedge \tau = 0\}$ si ha che $\Gamma^* = \Gamma' \wedge \Gamma^+$. D'altra parte, dal lemma precedente segue che $\Gamma^{**} = \Gamma \quad \forall \Gamma \in \phi$ e, quindi, l'asserto \dagger .

Teorema. Siano date Γ e Γ_0 in $FN(\underline{R})$ con Γ esaustiva. Posto $\Gamma_c = \Gamma \wedge \Gamma_0$ e $\Gamma_s = \Gamma \wedge \Gamma_0^+$, si ha che (Γ_c, Γ_s) è l'unica coppia di elementi di $FN(\underline{R})$ con le proprietà: $\Gamma = \Gamma_c \vee \Gamma_s, \Gamma_c \subseteq \Gamma_0$ e $\Gamma_s^+ \Gamma_0 = 0$.

Dim.

Considerato il reticolo booleano $\{\tau \in FN(\underline{R}) : \tau \leq \Gamma\}$ cui Γ_s appartiene, sia Γ_s^* il complemento di Γ_s . In virtù del lemma risulta $\Gamma_s^* = \Gamma_c$, cioè $\Gamma_c = \max\{\tau \in FN(\underline{R}) : \tau \leq \Gamma, \tau \wedge \Gamma_s = 0\}$.

\dagger Sia (L, \leq) un reticolo distributivo dotato di minimo 0. Se per ogni $a \in L$ esiste il massimo a^* dell'insieme $\{x \in L : a \wedge x = 0\}$ e se vale la condizione $a = a^{**}$ per ogni $a \in L$, allora L è un reticolo booleano risultando proprio a^* il complemento di a [4].

$\tau \in \Gamma$ e $\tau \wedge \Gamma_s = 0$), il che, essendo ovvia l'unicità della decomposizione, dimostra l'asserto.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. Drewnowski, Topological rings of sets, continuous set functions, integration I, II, III, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20(1972) 269-176, 277-286, 439-445.
- [2] L. Drewnowski, Decompositions of set functions, Studia Math. 48(1973) 23-48.
- [3] T. Traynor, The Lebesgue decomposition for group-valued set functions, Trans. Am. Math. Soc. 220(1976) 307-319.
- [4] G. Birkhoff, Lattice Theory N.Y. 1948.
- [5] H. Weber, Topological boolean rings. Decomposition of finitely additive set functions, in via di pubblicazione su Pac. Math. 110(1984).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Cimmino, C. Ciliberto, A. Zitarosa.

PROFILO ONTOGENETICO DELLA GLUCOSIO-6-FOSFATO DEIDROGENASI
NELL'IPOTALAMO DI TOPO

Nota di Gabriella Chieffi^o e Maria F. Caliendo^o

Presentata dal Socio Ordinario Vincenzo Leone

Adunanza del 7/4/84

Riassunto

Gli AA. hanno studiato il profilo dell'attività della glucosio-6-fosfato deidrogenasi (G6PDH) nel corso dello sviluppo dell'ipotalamo anteriore e posteriore di maschi e femmine di topo. Nell'ipotalamo anteriore l'attività enzimatica aumenta alla nascita e alla pubertà in entrambi i sessi. Nel maschio declina dopo il quarto mese, mentre nella femmina rimane invariata. Nell'ipotalamo posteriore del maschio si nota inoltre un notevole declino dal 150° giorno, cioè quando diminuisce la fertilità.

Le variazioni dell'attività della G6PDH vengono poste dagli AA. in relazione alle modificazioni del tasso di ormoni sessuali nei due sessi.

Abstract

Ontogenetic variations of glucose-6-phosphate dehydrogenase (G6PDH) activity in the anterior and posterior hypothalamus of male and female mice was studied. In the anterior hypothalamus the G6PDH activity increases after birth remaining at high level until the onset of puberty. During puberty the enzyme activity rises again remaining constantly at high level afterwards. G6PDH activity decreases after the 4th month in the male, while it does not vary in the female. After the 150th day after birth, the enzyme activity drops dramatically in the posterior hypothalamus of the male.

The variations of G6PDH activity well correlates to modifications of sex hormones (testosterone and estradiol) levels in the two sexes.

^o) Istituto e Museo di Zoologia, Università di Napoli.

E' stato dimostrato come l'attività di alcuni enzimi, coinvolti nel metabolismo steroideo ed energetico, sia variamente influenzata dagli steroidi sessuali nell'ipotalamo di ratto e topo (Luine et al., 1974, 1983; Milone et al., 1978, 1979a). Tra gli enzimi esaminati un particolare significato assume la glucosio-6-fosfato deidrogenasi (G6PDH), in quanto regola la gluco-ossidazione nella catena dei pentoso fosfati. Lo "shunt" è fonte di equivalenti riducenti per la biosintesi riduttiva e di pentosi per la sintesi di nucleosidi trifosfati e di RNA (Luine et al., 1974).

Rastogi et al. (1979a, b) hanno dimostrato l'androgeno-dipendenza della G6PDH in altri organi bersaglio degli steroidi, quali le vescicole seminali e l'epididimo di topo. Recentemente Lampariello et al. (1984) hanno osservato che, nella femmina, pressioni sociali e sessuali diverse, esercitate in età pre-pubere, modificano l'attività di questo enzima particolarmente nell'ipotalamo anteriore di topo adulto.

Pertanto ci è sembrato opportuno seguire il profilo ontogenetico della G6PDH nell'ipotalamo anteriore e posteriore del maschio e della femmina di topo, al fine di chiarire ed approfondire le correlazioni esistenti tra questo particolare indice del metabolismo ipotalamico e gli ormoni steroidei.

Materiali e metodi

La presente ricerca è stata eseguita su Mus musculus domesticus, ceppo Swiss albino cc. Gli individui esaminati, in nu-

mero di 270, erano ottenuti dall'accoppiamento di due maschi con cinque femmine per gabbia. I piccoli venivano tenuti con la genitrice fino allo svezzamento (20°-25° giorno dopo il parto) e poi stabulati in condizioni unisessuali in numero di cinque animali per gabbia. Nel periodo prenatale i feti sono stati prelevati 5 e 2 giorni prima del parto. Il sesso veniva riconosciuto mediante laparotomia. Dopo il parto venivano sacrificati cinque piccoli ad intervalli di cinque giorni fino al 90° giorno di età. Dal 90° giorno al 270° i prelievi sono stati eseguiti ogni 30 giorni. Agli animali, sacrificati previa narcosi in etere, veniva prelevato l'ipotalamo; dal 15° giorno dopo il parto era possibile dividerlo in una zona anteriore ed una posteriore, secondo la tecnica di Kato e Vिलlee (1967). L'ipotalamo in toto veniva pesato ed omogeneizzato in 3 ml di acqua distillata; gli ipotalami anteriori e posteriori, dopo pesati, erano omogeneizzati in 1,5 ml di acqua distillata.

Il contenuto proteico veniva determinato con la tecnica di Lowry et al. (1951), su 0.05 μ l di omogenato, esprimendolo in μ g di proteine/mg di tessuto fresco.

La determinazione dell'attività della G6PDH (EC 1.1.1.49) è stata eseguita col metodo di Buell et al. (1958), modificato da Milone et al. (1975), su 0.075 μ l di omogenato. L'attività dell'enzima veniva espressa in nmoli di NADH_2 liberato/ μ g di proteine/min.

Le femmine mature sessualmente erano sacrificate in fase estrale, in coincidenza della massima attività dell'enzima (Milone, dati non pubblicati).

Risultati

7° giorno prima del parto-10° giorno dopo il parto (Tabella 1)

Durante tale periodo le determinazioni delle proteine e della attività della G6PDH erano eseguite sull'ipotalamo in toto

PROTEINE Il contenuto proteico diminuisce significativamente nel periodo del differenziamento sessuale dell'ipotalamo (5° giorno dopo il parto).

G-6-P-DH L'enzima mostra un notevole aumento dell'attività in entrambi i sessi alla nascita, per poi decrescere, più marcatamente nella femmina, al termine del differenziamento sessuale dell'ipotalamo.

15°-270° giorno dopo il parto

Dal 15° giorno dopo il parto le determinazioni delle proteine e dell'attività della G6PDH sono state eseguite separatamente sull'ipotalamo anteriore e posteriore.

PROTEINE (Tabella 2)

Ipotalamo ant. Il contenuto proteico nel maschio si mantiene pressoché costante. Nella femmina si osserva una lieve diminuzione significativa nel periodo antecedente allo svezzamento (20°-25° giorno dopo il parto). Successivamente il contenuto proteico continua a decrescere e tale decremento

diventa significativo dall'85° giorno in poi.
Ipotalamo post. Il contenuto proteico di questa zona mostra variazioni simili a quelle dell'ipotalamo anteriore.

G-6-P_{DH} (Tabella 3)

Ipotalamo ant. L'attività dell'enzima nel maschio aumenta in periodopuberale (45° giorno dopo il parto), stabilizzandosi al massimo livello dopo la maturazione sessuale (55° giorno dopo il parto). Verso la fine del periodo fertile (150° giorno dopo il parto) si nota un declino, che diviene molto netto dal 6° mese di vita fino alla fine del periodo studiato. L'attività enzimatica nella femmina si mantiene a livelli pari ad $1/7-1/8$ rispetto a quelli del maschio fino alla pubertà. In questo periodo si nota un brusco incremento dell'attività enzimatica in entrambi i sessi e quella della femmina si porta ad $1/4$ dei valori maschili, per rimanere poi costante fino al 270° giorno. Dal 6° mese i valori si equivalgono nei due sessi.

Ipotalamo post. Nel maschio l'attività della G6PDH resta costante fino alla pubertà, poi aumenta lievemente e si mantiene tale fino al 4° mese. Suc-

cessivamente si riduce notevolmente di circa il 75% del valore iniziale, mantenendosi poi costante fino al 270° giorno. Nella femmina, invece, l'attività dell'enzima resta praticamente inalterata, con valori che in periodo prepuberale sono inferiori di circa 1/3 e in periodo postpuberale addirittura di 1/4 rispetto a quelli maschili.

Discussione

Nel corso dello sviluppo, il contenuto proteico dell'ipotalamo decresce dal 5° giorno prima del parto (inizio delle nostre osservazioni) fino al termine del differenziamento sessuale dell'organo (10° giorno dopo il parto). Inoltre non si osservano differenze nella concentrazione di proteine tra l'ipotalamo anteriore e posteriore.

Per quanto concerne il comportamento dell'attività della G6PDH, il suo repentino incremento alla nascita, sia nel maschio che nella femmina, si potrebbe correlare agli alti livelli di testosterone nel maschio (Berger *et al.*, 1975) e di estradiolo nella femmina (Weisz *et al.*, 1980) in tale periodo. Successivamente allo svezzamento, in seguito alla diminuzione del tasso di ormoni anche l'attività enzimatica mostra un certo declino. Inoltre in questo periodo è stato osservato un aumento della sensibilità dell'ipotalamo al feedback gonadico (Vito e Fox, 1982). Questi autori hanno

riscontrato un aumento dei recettori androgenici ed estrogenici nell'ipotalamo di topo dal 10° al 25° giorno di vita. Nel maschio il forte aumento della G6PDH nell'ipotalamo anteriore, registrato alla pubertà, sembra coincidere con l'incremento plasmatico degli androgeni, che si riscontra tra i 30 e i 50 giorni (Selmanoff et al., 1977) e con l'instaurarsi di una completa attività sessuale. Questa, infatti, è regolata dall'ipotalamo anteriore (Davidson, 1969), come pure il rilascio ciclico dell'LH ipofisario (Bodganove, 1964).

Il declino dell'attività enzimatica dopo il 150° giorno è anch'esso dovuto all'androgeno-dipendenza dell'enzima; infatti dopo il 6° mese si ha nel maschio un declino della fertilità (Milone et al., 1979 b).

Nella femmina, nello stesso periodo, l'attività della G6PDH non si modifica, come pure la fertilità (Di Matteo et al., 1983). È da notare che lo stesso fenomeno è stato da noi osservato anche per un altro enzima steroide-dipendente, la malato deidrogenasi (Chieffi et al., in corso di stampa).

L'attività enzimatica nell'ipotalamo posteriore non mostra notevoli variazioni, se non dal 150° giorno in poi nel maschio, quando diminuisce significativamente. Quest'area controlla funzioni quali le risposte agli stimoli ambientali (Smelick, 1970) e le cure parentali (Moltz et al., 1969), per cui le modificazioni osservate solo nel maschio potrebbero essere correlate a una variazione dell'attività motoria che esso mostra nel corso dei nove mesi studiati (Dessi-Fulgheri et al., 1975).

È da notare che l'attività della G6PDH dal 10°-15° giorno dopo il parto si diversifica in modo notevole nei due sessi, aumentando molto più nel maschio che nella femmina.

In conclusione, le variazioni dell'attività della G6PDH nell'ipo-

talamo nel corso dello sviluppo del topo possono essere riferite alla steroide-dipendenza di questo enzima. Questa dipendenza è stata già dimostrata nel maschio da Brooks(1976) nell'epididimo di ratto e da Rastogi et al.(1979 a,b) nelle vescicole seminali e nell'epididimo di topo. Nella femmina il controllo della G6PDH potrebbe essere estrogenico: una dipendenza dell'enzima dagli estrogeni è stata dimostrata nella placenta(Betz e Warren, 1965), nell'ovario(Nielson e Warren, 1965), nell'ipotalamo in toto nell'area preottica(Luine et al., 1983).

Bibliografia

- 1) BERGER M., JEAN-FAUCHER Ch., DE TURCKHEIM M., VEYSSIERE C., JEAN C. (1975). Étude des androgènes testiculaires et plasmatiques chez les souris nouveau-né, immature, adulte et senescente. ARCH. INT. PHYS. BIOCH.: 83, 239-253.
- 2) BETZ G., WARREN J.C. (1965). Studies with glucose-6-phosphate dehydrogenase from human placenta. ACTA ENDOCR.(Copenhagen):49 47-55.
- 3) BOGDANOVA E.M.(1964). The role of the brain in the regulation of pituitary gonadotropin secretion. VITAMS HORM.: 22, 205-260.
- 4) BROOKS D.E.(1976). Control of glycolytic enzymes by androgens in the rat epididymis. J. ENDOCR.:71, 355-365.
- 5) BUELL M.V., LOWRY O.H., ROBERTS N.R., CHANG M.N., KAPPHALM J.J.(1958). The quantitative histochemistry of brain.V) Enzymes of glucose metabolism. J. BIOL. CHEM.: 232,979-993.
- 6) CHIEFFI G., CALIENDO M.F., MILONE M.(1984). Modificazioni della malato deidrogenasi nell'ipotalamo di topo durante lo sviluppo

REND. ACC. SCI MM FF NN (in corso di stampa).

- 7) DAVIDSON M. (1969). Effects of estrogen on the sexual behaviour of male rats. *ENDOCRINOLOGY*: 84, 1365-1372.
- 8) DESSI'-FULGHERI F., MESSERI P., LUPO DI PRISCO C. (1975). Learning and plasmatic steroids in the mouse. A correlation study. *BOLL. ZOOL.*: 42, 331-340.
- 9) DI MATTEO L., DEL MONACO G., CALIENDO M.F., VARRIALE B., SIMEOLI C., MILONE M. (1982). Crowding factors: a possible role on the population dynamics in the mouse. *BOLL. ZOOL.*: 49, supp. 49, 62.
- 10) KATO J., VILEE C.A. (1967). Preferential uptake of estradiol by the anterior hypothalamus of the rat. *ENDOCRINOLOGY*: 80, 567-575.
- 11) LAMPARIELLO C., PALMIERI D., GUIDA M., MILONE M. (1984). L'ipotalamo nella modulazione della fertilità e degli aspetti etologici connessi nel topo femmina. *ATTI I CONGR. NAZ. ENDOCR. GINEC. Madonna di Campiglio*, 18-25/3/84.
- 12) LOWRY O.H., ROSEBROUGH J.N., RANDALL J.R. (1951). Protein measurement of the Folin phenol reagent. *J. BIOL. CHEM.*: 193, 265-270.
- 13) LUINE V.N., KHYLCHEVSKAYA R.I., MC EWEN B.S. (1974). Oestrogen effects on brain and pituitary enzyme activities. *J. NEUROCH.*: 23, 925-35.
- 14) LUINE V.N., RHODES J.C. (1983). Gonadal hormone regulation of MAO and other enzymes in hypothalamic areas. *NEUROENDOCRINOLOGY*: 36, 235-41.
- 15) MILONE M., RASTOGI R.K., IEI A L. (1975). Cyclic changes in the enzyme activity of the hypothalamo-hypophyseal system of the frog, *Rana esculenta*. *GEN. COMP. ENDOCR.*: 26, 107-114.
- 16) MILONE M., GRECO M., CALIENDO M.F. (1978). L'attività della MDH e della β -GLR nel sistema ipotalamo-ipofisario di maschi adulti di

Mus musculus domesticus in diverse condizioni socio-sessuali. BOLL. ZOOL.

45,34.

- 17) MILONE M., DEL SORBO F., CORVINO A., CALIENDO M.F., RASTOGI R.K. (1979a).
Effetto temporale dell'acetato di ciproterone nell'attività
della β -GLR e della MDH nell'ipotalamo di topo maschio adulto.
BOLL. ZOOL.: 46, 298-299.
- 18) MILONE M., DEL SORBO F., CORVINO A. (1979 b). Isolamento, comportamento
socio-sessuale e fertilità maschile. BOLL. SOC. NATUR.: 88, 549-59.
- 19) MOITZ H., LEVIN R., LEON M. (1969). Prolactin in the postpartum rat: synthe-
sis and release in the absence of suckling stimulation. SCIEN-
CE: 163, 1083-1084.
- 20) NIELSON M.H., WARREN J.C. (1965). Steroid effects on glucose-6-phosphate
dehydrogenase from bovine corpora lutea. BIOCH. BIOPH. ACTA: 97,
532-541.
- 21) RASTOGI R.K., MILONE M., DI MEGLIO M., CALIENDO M.F., CHIEFFI G. (1979).
Effect of castration, 5α -DH and cyproterone acetate on enzyme
activity in the mouse epididymis. J. REPROD. FERT.: 57, 73-77.
- 22) RASTOGI R.K., MILONE M., CALIENDO M.F., DI MEGLIO M. (1979). A study of
enzyme activity in the seminal vesicles of castrated and hor-
mone-replaced castrated mice. EXPERIENTIA: 35, 419-420.
- 23) SELMANOFF M.K., GOLDMAN B.D., BENSON E. G. (1977). Developmental changes in
serum LH, FSH and androgen levels in males of two inbred mouse
strains. ENDOCRINOLOGY: 100, 122-127.
- 24) SMELICK P.G. (1970). "Integrated hypothalamic responses to stress". Da "The
hypothalamus". Martini L., Motta M., Fraschini F. (eds). Acad. Press

- 25) VITO C.C., FOX T.O. (1982). Androgen and estrogen receptors in embryonic and neonatal rat brain. *DEVEL. BRAIN RES.*: 2, 97-110.
- 26) WEISZ J., WARD I.L. (1980). Plasma testosterone and progesterone of pregnant rats, their male and female fetuses and neonatal offspring. *ENDOCRINOLOGY*: 106, 306-316.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, M. De Vincentiis, A. Morescalchi.

TABELLA 1

ETA' (giorni)	PROTEINE ^o		G-6-P D H ^{oo}	
	♂♂	♀♀	♂♂	♀♀
5 a.p.	105±8	104±8	138±36	133±37
2	103±7	101±6	140±23	131±42
0	95±5	96±6	908±76	832±113
5 p.p.	77±8	75±6	866±92	896±55
10	64±4	68±4	501±44	174±9

^o) Il contenuto proteico è espresso in µg/mg di tessuto fresco.

^{oo}) L'attività della G-6-PDH è espressa in nM/µg di proteine/min.

TABELLA 2

ETA' (giorni)	PROTEINE			
	♂ ♂		♀ ♀	
	Ip. ant.	Ip. post.	Ip. ant.	Ip. post.
15 p.p.	53±4	48±3	55±4	51±6
20	48±3	45±5	44±4	42±3
25	46±4	41±2	42±5	41±3
30	47±5	43±3	41±4	43±5
35	44±3	42±4	44±3	42±4
40	47±2	40±3	45±4	42±4
45	42±5	44±6	40±4	41±5
50	45±6	43±3	42±3	41±3
55	48±2	46±3	40±3	39±4
60	44±6	42±2	40±3	40±5
65	43±5	44±2	38±2	36±3
70	46±3	46±4	35±3	33±6
75	49±4	45±4	33±4	34±3
80	40±3	42±4	34±3	35±2
85	42±3	44±4	33±2	32±3
90	44±4	43±5	32±3	30±3
120	43±3	48±3	34±3	33±2
150	47±2	41±3	33±3	34±2
180	45±2	47±2	32±3	33±3
210	46±3	46±4	32±4	32±4
240	48±3	45±6	33±3	33±4
270	42±4	41±4	33±4	33±3

TABELLA 3

ETA' (giorni)	G-6-P D H			
	♂ ♂		♀ ♀	
	Ip.ant.	Ip.post.	Ip.ant.	Ip.post.
15 p.p.	416±49	635±62	68±7	192±19
20	471±66	627±81	64±4	188±16
25	523±55	614±78	66±7	171±17
30	498±63	624±52	72±9	178±26
35	508±58	642±43	68±5	180±27
40	549±42	638±61	70±8	182±19
45	742±73	628±59	71±11	177±31
50	1298±81	731±54	308±39	206±28
55	1380±127	782±103	304±33	209±19
60	1391±106	757±98	315±28	200±34
65	1424±151	736±66	301±20	204±20
70	1411±115	798±78	303±18	211±24
75	1386±131	802±111	307±24	206±14
80	1342±128	815±82	310±16	209±26
85	1320±118	831±58	304±17	219±9
90	1355±103	825±79	302±20	214±15
120	1371±144	818±63	305±18	209±28
150	928±81	401±55	303±14	216±24
180	334±28	256±26	308±19	218±22
210	322±24	217±44	311±23	222±25
240	326±25	224±43	313±20	224±21
270	318±22	227±41	310±18	220±22

SULLA QUESTIONE DELLA ATTRAZIONE NEGLI SPAZI METRICI (+)

Nota di Livia D'Apuzzo (++)

Presentata dal socio corrispondente Antonio Zitarosa

Adunanza del 7/4/1984

Riassunto. In questo lavoro vengono considerate le applicazioni ϕ di uno spazio metrico (S, d) in sè verificanti, per un punto x_0 di S , la condizione : $d(\phi(x), \phi(x_0)) \leq d(x, x_0) \forall x \in S$; per tali funzioni vengono date condizioni sufficienti a che x_0 sia punto unito attraente S .

Abstract. In this paper we consider selfmappings ϕ on a metric space (S, d) such that, for a fixed $x_0 \in S$: $d(\phi(x), \phi(x_0)) \leq d(x, x_0)$ for any $x \in S$; we give sufficient conditions so that : $\lim_n \phi^n(x) = x_0$ for any $x \in S$.

La ricerca di condizioni sufficienti a che, per una applicazione ϕ di uno spazio metrico (S, d) in sè, un punto x_0 di S ϕ -attragga S è condotta in questo lavoro nell'ambito dell'insieme A_{x_0} delle applicazioni ϕ di S in sè tali che :

$$d(\phi(x), x_0) \leq d(x, x_0) \quad \forall x \in S.$$

Si rileva in particolare (teor. (2.2)) che, per una applicazione ϕ di A_{x_0} , condizione sufficiente a che x_0 ϕ -attragga S è che per ogni numero reale positivo ϵ esistano un numero reale r maggiore di ϵ ed un intero positivo p tali che :

$$d(x, x_0) < r \implies d(\phi^p(x), x_0) < \epsilon.$$

(+) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

(++) Istituto di Matematica della Facoltà di Architettura dell'Università di Napoli

Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze Nautiche dell'Istituto Universitario Navale di Napoli.

Ne consegue in alcuni casi (cor.(2.3)) la sufficienza della condizione :

$$(*) \quad d(\phi(x), x_0) < d(x, x_0) \quad \forall x \in S - \{x_0\}$$

a che x_0 sia punto unito per ϕ attraente S . In altri casi è d'altro canto acquisita la necessarietà della (*) (cfr. n.3).

1. Premesse

Siano (S, d) uno spazio metrico e x_0 un punto di S .

Relativamente ad una data applicazione ϕ di S in sè denoteremo, per ogni numero reale positivo ε e per ogni intero positivo p , con $\omega_p(\varepsilon)$ il massimo dell'intervallo chiuso di $[0, +\infty]$ così definito :

$$\{r \in [0, +\infty] : (d(x, x_0) < r \implies d(\phi^p(x), x_0) < \varepsilon)\} \quad (1),$$

e con $\omega_p^*(\varepsilon)$ il massimo dell'intervallo chiuso di $[0, +\infty]$ così definito :

$$\{r \in [0, +\infty] : (d(x, x_0) < r \implies d(\phi^p(x), x_0) \leq \varepsilon)\}.$$

Evidentemente risulta :

$$(1) \quad \omega_p(\varepsilon) \leq \omega_p^*(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ e } \forall p \in \mathbb{N}.$$

Denoteremo, inoltre, con A_{x_0} l'insieme delle applicazioni ϕ di S in sè per le quali :

$$d(\phi(x), x_0) \leq d(x, x_0) \quad \forall x \in S ;$$

ovviamente :

$$(2) \quad \phi(x_0) = x_0 \quad \forall \phi \in A_{x_0}$$

$$(3) \quad \phi \in A_{x_0} \iff (\phi^p \in A_{x_0} \quad \forall p \in \mathbb{N}).$$

(¹) Per ogni $p \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} =l'insieme degli interi positivi) indichiamo con ϕ^p l'iterata p -esima di ϕ .

(1.1) - Le seguenti condizioni sono equivalenti :

$$(4) \quad \phi \in A_{x_0}$$

$$(5) \quad \omega_1(\epsilon) \geq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

$$(6) \quad \omega_p(\epsilon) \geq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \text{ e } \forall p \in \mathbb{N}.$$

DIM. Poichè vale la (3) è sufficiente dimostrare l'equivalenza delle condizioni (4) e (5).

(4) \implies (5). Evidente.

(5) \implies (4). Supponiamo per assurdo che esista un punto x di S tale che :

$$d(x, x_0) < d(\phi(x), x_0).$$

Detto allora ϵ un numero reale per il quale risulti :

$$(7) \quad d(x, x_0) < \epsilon < d(\phi(x), x_0),$$

a norma di (5) si ha $d(x, x_0) < \omega_1(\epsilon)$ e quindi anche, in contrasto con la (7) :

$$d(\phi(x), x_0) < \epsilon.$$

(1.2) - Sia ϕ una applicazione di S in sè. La condizione :

$$(8) \quad \omega_1(\epsilon) > \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

implica la seguente altra :

$$(9) \quad d(\phi(x), x_0) < d(x, x_0) \quad \forall x \in S - \{x_0\},$$

ed è ad essa equivalente se è verificata una delle condizioni seguenti :

(10₁) ogni parte limitata di S è relativamente compatta e ϕ è continua;

(10₂) S è un intervallo di \mathbb{R} , e ϕ è continua a destra in $[x_0, \sup S[$ e continua a sinistra in $] \inf S, x_0]$ ⁽²⁾;

(10₃) S è un intervallo di \mathbb{R} , x_0 è punto unito di ϕ e risulta :

$$(11) \quad (\phi(x) - x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in S$$

$$(12) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x^+} \phi(t) < x & \forall x \in]x_0, \sup S[\\ \lim_{t \rightarrow x^-} \phi(t) > x & \forall x \in] \inf S, x_0[. \end{cases}$$

(²) - Ogni qualvolta considereremo una parte S dell'insieme dei numeri reali, intenderemo che S sia munita della metrica indotta su S dalla metrica euclidea in \mathbb{R} .

DIM. $(8) \implies (9)$. Basta pensare che per ogni punto x diverso da x_0 risulta :

$$d(x, x_0) < \omega_1(d(x, x_0)).$$

$(9) \implies (8)$ se è vera la (10_1) . La (9) e la continuità di ϕ implicano che $\phi(x_0) = x_0$; appartenendo conseguentemente ϕ ad A_{x_0} , a norma di (1.1) risulta $\omega_1(\epsilon) \geq \epsilon$ per ogni ϵ positivo.

Sia, per assurdo, ϵ un numero reale positivo tale che $\omega_1(\epsilon) = \epsilon$.

E' allora non vuoto, per ogni intero positivo n , l'insieme :

$$C_n = \{x \in S : (\epsilon \leq d(\phi(x), x_0) \text{ e } d(x, x_0) \leq \epsilon + 1/n)\}.$$

La successione $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è evidentemente una successione decrescente di insiemi chiusi sul compatto C_1 e l'intersezione di tali insiemi è quindi non vuota. Detto \bar{x} un punto di tale intersezione si ha :

$$\epsilon < d(\phi(\bar{x}), x_0) \leq d(\bar{x}, x_0) \leq \epsilon + 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

il che è assurdo, in quanto comporta $\epsilon = d(\phi(\bar{x}), x_0) = d(\bar{x}, x_0)$.

$(9) \implies (8)$ se è vera la (10_2) . Basta provare che, qualunque sia il numero reale positivo ϵ :

i) esiste un numero reale $r > \epsilon$ tale che :

$$x_0 \leq x < x_0 + r \implies |\phi(x) - x_0| < \epsilon;$$

j) esiste un numero reale $r > \epsilon$ tale che :

$$x_0 - r < x \leq x_0 \implies |\phi(x) - x_0| < \epsilon.$$

Allo scopo di provare la i) osserviamo che, risultando (per la (9) e la continuità di ϕ in x_0) x_0 punto unito di ϕ , si ha a norma della (9):

$$|x - x_0| \leq \epsilon \implies |\phi(x) - x_0| < \epsilon.$$

La i) è allora evidente se $x_0 + \epsilon$ non appartiene a S , e in caso contrario consegue in modo ovvio dalla continuità a destra di ϕ in $x_0 + \epsilon$.

Analogamente si dimostra la j).

$(9) \implies (8)$ se è vera la (10_3) . Basta provare che, qualunque sia il numero reale positivo ϵ :

i') esiste un numero reale $r > \epsilon$ tale che:

$$x_0 < x < x_0 + r \implies \phi(x) < x_0 + \epsilon;$$

j') esiste un numero reale $r > \epsilon$ tale che :

$$x_0 - r < x < x_0 \implies x_0 - \epsilon < \phi(x).$$

Allo scopo di provare la i') osserviamo che in virtù della (11) la (9) è equivalente alla seguente condizione :

$$\begin{cases} x_0 < x \implies x_0 \leq \phi(x) < x \\ x < x_0 \implies x < \phi(x) \leq x_0, \end{cases}$$

e che pertanto dalla (9) consegue che :

$$\begin{cases} x_0 < x \leq x_0 + \epsilon \implies \phi(x) < x_0 + \epsilon \\ x_0 - \epsilon \leq x < x_0 \implies x_0 - \epsilon < \phi(x). \end{cases}$$

La i') è allora evidente se $x_0 + \epsilon$ non appartiene ad S , e, in caso contrario, segue ovviamente dal risultare per la (12) :

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 + \epsilon)^+} \phi(x) < x_0 + \epsilon.$$

Analogamente si dimostra la j').

Ognuno dei seguenti esempi mostra che la (10₁), la (10₂) e la (10₃) sono essenziali per la validità dell'implicazione (9) \implies (8).

ESEMPIO (1.3) - Siano $S = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ e ϕ l'applicazione continua di S in sè definita dalla seguente posizione:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ (x+1)/2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per $x_0 = 0$ è verificata la (9) e tuttavia risulta $\omega_1(1) = 1$.

ESEMPIO (1.4) - Siano $S = [0, +\infty[$ e ϕ l'applicazione di S in sè definita dalla seguente posizione :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per $x_0 = 0$ è verificata la (9) e tuttavia risulta $\omega_1(1) = 1$.

La considerazione della applicazione ϕ di cui all'esempio (1.4) mostra che la condizione $\omega_p^*(\epsilon) > \epsilon$ non implica la condizione $\omega_p(\epsilon) > \epsilon$.

E' d'altra parte vera la proposizione seguente :

(1.5) - Siano ϕ una applicazione di S in sè avente x_0 come punto unito e k un intero positivo tale che :

$$(13) \quad d(\phi^k(x), x_0) < d(x, x_0) \quad \forall x \in S - \{x_0\};$$

Allora, per ogni numero reale positivo ϵ e per ogni intero positivo p , la condizione :

$$(14) \quad \omega_p^*(\epsilon) > \epsilon$$

implica la seguente altra :

$$(15) \quad \omega_{p+k}(\epsilon) > \epsilon.$$

DIM. Risultando

$$d(\phi^{p+k}(x), x_0) < d(\phi^p(x), x_0) \quad \forall x \in S : \phi^p(x) \neq x_0,$$

$$\phi^{p+k}(x) = x_0 \quad \forall x \in S : \phi^p(x) = x_0,$$

la condizione (14), che equivale alla seguente :

$$\exists r > \epsilon : (d(x, x_0) < r \implies d(\phi^p(x), x_0) \leq \epsilon),$$

implica che :

$$\exists r > \epsilon : (d(x, x_0) < r \implies d(\phi^{p+k}(x), x_0) < \epsilon).$$

La considerazione del seguente esempio prova che, nelle ipotesi della (1.5), la (15) non implica la (14) :

ESEMPIO (1.6) - Per $S = \mathbb{R}$, sia ϕ l'applicazione di A_0 definita dalla posizione :

$$\phi(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Risultano verificate la (13) e la disuguaglianza $\omega_{1+k}(\epsilon) > \epsilon$, qualunque siano l'intero $k \geq 2$ e il numero reale positivo ϵ ; tuttavia risulta $\omega_1^*(\epsilon) = \epsilon$.

(1.7) - Sia ϕ una applicazione di A_{x_0} . Allora, qualunque sia l'intero positivo k la condizione (13) implica la seguente :

$$(16) \quad \underline{x_0 \text{ è l'unico punto unito di } \phi^k},$$

ed è ad essa equivalente, limitatamente al caso $k \in \{1, 2\}$, se :

σ_k) ogni circonferenza di centro x_0 è costituita di al più k punti.

DIM. La prima parte dell'asserto è evidente quando si tenga conto della (3) e della (2).

Dimostriamo la seconda parte dell'asserto nel caso $k=2$ (analogamente si potrà procedere nel caso $k=1$). Poichè ϕ^2 è un elemento di A_{x_0} , è sufficiente dimostrare che non esiste alcun punto x di S distinto da x_0 per il quale risulti :

$$(17) \quad d(\phi^2(x), x_0) = d(x, x_0)$$

A tal fine osserviamo che la (17) implica :

$$(18) \quad d(\phi^2(x), x_0) = d(\phi(x), x_0) = d(x, x_0),$$

e quindi anche, a norma della σ_2 , il verificarsi di almeno una delle seguenti eguaglianze :

$$x = \phi(x), \quad x = \phi^2(x), \quad \phi(x) = \phi^2(x).$$

Ma ciò è assurdo in quanto, essendo $\phi(x)$, al pari di x , diverso da x_0 (cfr. (18)), a norma della (16) né x né $\phi(x)$ può essere punto unito per ϕ o per ϕ^2 .

2. Condizioni sufficienti per l'attrazione

Premettiamo il seguente :

TEOREMA (2.1) - Se $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione decrescente di numeri reali non negativi, condizione (necessaria e) sufficiente a che sia infinitesima è la seguente :

α_N) per ogni numero reale positivo ϵ esistono un numero reale r maggiore di ϵ ed un intero positivo p tali che :

$$t_n < r \implies t_{n+p} < \epsilon.$$

DIM. Supposto, per assurdo, positivo il limite ϵ della successione $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e considerati il numero reale r e l'intero positivo p di cui alla α_N , sia m un intero positivo tale che :

$$t_m < r.$$

Risulta allora, a norma di α_N , $t_{m+p} < \epsilon$, il che è assurdo.

Dal teorema ora dimostrato discende il seguente :

TEOREMA (2.2) - Se ϕ è una applicazione di A_{x_0} , condizione sufficiente a che x_0 ϕ -attragga S ⁽³⁾ è la seguente :

α) per ogni numero reale positivo ϵ esiste un intero positivo p tale che :

$$\omega_p(\epsilon) > \epsilon \quad (4).$$

DIM. E' sufficiente osservare che, detto x un punto di S , la successione :

$$(d(\phi^n(x), x_0))_{n \in \mathbb{N}}$$

è decrescente e verifica, in conseguenza di α), la α_N).

Il teorema (2.2) ammette a norma di (1.2) e (1.5) i seguenti corollari :

COROLLARIO (2.3) - Sia ϕ una applicazione di S in sè. Se è verificata una delle condizioni (10₁), (10₂), (10₃), la (9) è condizione sufficiente a che x_0 risulti punto unito ϕ -attraente S . ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾

COROLLARIO (2.4) - Sia ϕ una applicazione di A_{x_0} . Se, per un opportuno intero positivo k , è verificata la (13), condizione sufficiente a che x_0 ϕ -attragga S è la seguente :

per ogni numero reale positivo ϵ esiste un intero positivo p per il quale è verificata la (14).

- - - - -

⁽³⁾ La locuzione " x_0 ϕ -attrae S " (o più semplicemente, " x_0 attrae S ") significa :

$$\lim_n \phi^n(x) = x_0 \quad \forall x \in S.$$

⁽⁴⁾ Evidentemente, nel teorema (2.2) la α) può essere sostituita dalla condizione più generale:

β) per ogni numero reale positivo ϵ esiste un numero reale

$r > \epsilon$ tale che : $d(x, x_0) < r \implies \exists p \in \mathbb{N} : d(\phi^p(x), x_0) < \epsilon$,

peraltro necessaria per l'attrazione (a prescindere dall'appartenenza di ϕ ad A_{x_0}).

⁽⁵⁾ Tale proposizione può dedursi, limitatamente alla considerazione della (10₁), anche dal Lemma 1.2 di [2] e implica, relativamente alla (10₃), la proposizione (3.1) di [4] .

⁽⁶⁾ Nel corollario (2.3) la (10₁), la (10₂) e la (10₃) sono essenziali. Utile in proposito è considerare lo spazio S e la funzione ϕ di cui all'esempio (1.3), nonchè lo spazio $\bar{S} = S \cup \{1\}$ e il prolungamento $\bar{\phi}$ di ϕ su \bar{S} ottenuto ponendo $\bar{\phi}(1) = 0$: in entrambi i casi, il punto 0 non attrae.

Il corollario (2.4) implica il seguente risultato di M.L. DIVICCARO, da lei gentilmente comunicatomi, che generalizza la citata proposizione (3.1) di [4] :

(2.5) - Sia ϕ una applicazione di R in $sè$ tale che :

$$\phi(x_0) = x_0, \quad |\phi(x) - x_0| < |x - x_0| \quad \forall x \neq x_0.$$

Allora, condizione sufficiente a che x_0 ϕ -attraetta S è la seguente : per ogni numero reale positivo ϵ esiste un numero reale r maggiore di ϵ tale che :

$$|x - x_0| \in]\epsilon, r[\implies |\phi(x) - x_0| \leq \epsilon.$$

NOTA (2.6) - E' facile provare che i teoremi (2.1) e (2.2) sono equivalenti. In proposito, basta tener presenti la dimostrazione del teorema (2.2) e le seguenti considerazioni che permettono di dedurre il teorema (2.1) dal teorema (2.2).

A norma di α_N , la successione $(t_n)_{n \in N}$ o è definitivamente nulla o non è definitivamente costante. In quest'ultimo caso, considerata la successione $(n_h)_{h \in N}$ di interi positivi così definita per ricorrenza :

$$n_1 = 1, \quad n_h = \min \{s \in N : t_s < t_{n_{h-1}}\} \quad (h > 1),$$

basta applicare il teorema (2.2) all'insieme S costituito da 0 e dagli elementi della successione $(t_{n_h})_{h \in N}$ ed alla applicazione ϕ di S in $sè$ definita dalle posizioni :

$$\phi(0) = 0, \quad (t_{n_h}) = t_{n_{h+1}} \quad (h \in N).$$

3. Condizioni necessarie per l'attrazione.

(3.1) - Se (S, d) e x_0 verificano, per un opportuno k di $\{1, 2\}$, la σ_k e ϕ è una applicazione di A_{x_0} , la (13) è condizione necessaria a che x_0 ϕ -attraetta S . (7)

- - - - -

(7) A proposito della (13) rileviamo esplicitamente che (a prescindere dalle ipotesi della (3.1)), qualunque sia l'intero positivo k , la (13) è sufficiente a che x_0 ϕ -attraetta S se per S e ϕ^k è soddisfatta una delle condizioni (10₁), (10₂) e (10₃). Tale sufficienza segue dal corollario (2.3) e dalla osservazione che ogni punto unito per ϕ^k che ϕ^k -attraetta S è anche un punto unito per ϕ , ϕ -attraente S .

DIM. Poichè, evidentemente, l'ipotesi che x_0 ϕ -attrae S implica che x_0 ϕ^k -attrae S ed è quindi l'unico punto unito di ϕ^k , l'asserto segue dalla (1.7).

A proposito della (3.1) si può notare che sono ipotesi essenziali tanto la σ_k quanto l'appartenenza di ϕ ad A_{x_0} . Ciò è provato dai seguenti esempi :

ESEMPIO (3.2) - Per $S = [-1, 1]$ e $x_0 = 0$ sia ϕ l'applicazione di A_0 definita dalla seguente posizione :

$$\phi(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x/2 & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases} .$$

Per $k=1$ non è verificata la σ_k e, pur attraendo 0 lo spazio S , non è verificata la (13).

ESEMPIO (3.3) - Per $S=R$ e $x_0=0$ sia ϕ l'applicazione di S in sè, non appartenente a A_0 , definita dalla posizione :

$$\phi(x) = \begin{cases} -4x & \text{se } x \leq 0 \\ x/2 & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

Per $k=2$ è verificata la σ_k ma, pur non attraendo 0 lo spazio S , non vale la (13).

(3.4) - La (9) è condizione necessaria a che x_0 sia punto unito per ϕ attraente S , in ognuno dei seguenti casi :

- I) S è un intervallo di R , ϕ è continua e verifica la (11);
- II) S è una parte di R e ϕ è crescente.

DIM. Sia verificato il caso I). Poichè x_0 è l'unico punto unito di ϕ , non esistono due punti distinti x_1 e x_2 di S , entrambi maggiori di x_0 o entrambi minori di x_0 , tali che :

$$\phi(x_1) < x_1, \quad \phi(x_2) > x_2,$$

e d'altra parte l'ipotesi :

$$(\phi(x) > x \quad \forall x > x_0) \text{ o } (\phi(x) < x \quad \forall x < x_0)$$

comporta :

$$(\phi^n(x) > x \quad \forall x > x_0 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}) \text{ o } (\phi^n(x) < x \quad \forall x < x_0 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}),$$

il che è assurdo in quanto x_0 ϕ -attrae S.

Da ciò e dalla (11) segue in modo ovvio la (9).

Sia verificato il caso II). L'ipotesi che per un dato $x > x_0$ risulti $\phi(x) > x$ implica, per la crescenza di ϕ , l'assurdo :

$$\phi^n(x) > x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Deve quindi risultare :

$$\phi(x) < x \quad \forall x > x_0,$$

e analogamente si dimostra che :

$$\phi(x) > x \quad \forall x < x_0.$$

Da ciò e dalla (11), evidentemente verificata per la crescenza di ϕ , segue in modo ovvio la (9).

NOTA (3.5) - Relativamente al caso I) è possibile invertire la (3.4).

Ciò segue dal corollario (2.3). ⁽⁸⁾

Non è invece possibile invertire la (3.4) nel caso II): in proposito è sufficiente considerare l'esempio (1.3).

In [1] dimostro che nel caso II) il punto x_0 ϕ -attrae S se e solo se è verificata la (9) e risulta $\omega_1^*(\varepsilon) > \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.

⁽⁸⁾ Tale invertibilità può anche dedursi da un risultato di B.MESSANO (cfr. teor. (4.2) di [3]).

- [1] L. D'APUZZO - Pluriattrazione (presentato a "Le Matematiche")
- [2] L. JANOS - Un teorema di punto fisso associato all'equazione delle corde vibranti, Boll. U.M.I. (4), 11, suppl. fasc. 3 (1975), 80 - 86.
- [3] B. MESSANO - Convergenza globale del metodo delle approssimazioni successive in un insieme totalmente ordinato, Rend. di Mat. (4), vol. 2, serie VII (1982), 725 - 739.
- [4] L. SGAMBATI - Sulle applicazioni di R in R dotate di un punto unito attraente R , Rend. Ist. di Mat. Univ. di Trieste, vol. III, fasc. I (1971), 62 - 64.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci : C.Ciliberto, G.Cimmino, A.Zitarosa.

TRITERPENES OF BOSWELLIA CARTERII

Nota di Cabdi Farah Xaasan¹, Luigi Minale², Mohamed Bashir¹, Mohamed Hussein¹ and Ester Finamore².

Presentata dal Socio

Adunanza del 7.4.1984

Riassunto: L'epi-lupeol acetato, l'epilupeolo e il tirucallolo sono stati isolati dalla resina della Boswellia carterii. La composizione triterpenica della B.carterii è paragonata a quella della B.freerana.

Abstract.- Epi-lupeol acetate, epi-lupeol and tirucallol have been isolated from frankincense produced by Boswellia carterii. The triterpenes composition of B.carterii is compared with that of B.freerana.

Introduction

Recently Proietti *et al.* (1981) have described the isolation of lupeol and epi-lupeol from the neutral fraction of the resin produced by Boswellia freerana. In a program of research on the composition of the Somali frankincenses, recently started at the Faculty of Industrial Chemistry of the National University of Somalia, we have investigated firstly the neutral fraction of the resins produced by the two more widely distributed Boswellia, i.e. B.freerana and B.carterii.

¹Facoltà di Chimica Industriale, Università Nazionale Somala, MOGADISCIO, Somalia.

²Dipartimento di Chimica delle Sostanze Naturali, Università, Via L.Rodinò, 22, 80138 NAPOLI, Italy.

RESULTS

Both resins have been extracted in a Soxhlet apparatus with light petroleum (b.p. 40-70°); the extract from B. freerana was 95% of the total resin, while B. carterii has given a 66% of extractable material.

B. freerana

The neutral extract was separated by column chromatography on silica gel by using cyclohexane and increasing amounts of benzene to give epi-lupeol acetate, epi-lupeol (Tursh and Tursh, 1961) and Lupeol (Devon and Scott, 1972), eluted in that order. Epi-lupeol, which constitutes ca. 50% of the neutral extract, was identified by $^1\text{H-nmr}$, m.p., and conversion by Jones oxidation to the corresponding lupenone, m.p. 168-70° [Lit. (Devon and Scott, 1972) m.p. 170°]. Epi-lupeol acetate (ca. 10%) was identified by $^1\text{H-nmr}$ and direct comparison with the acetate of the above epi-lupeol, Lupeol (ca. 18%), m.p. 210-14°C [Lit. m.p. 215° (Devon and Scott, 1972)], was transformed to the same lupenone (m.p., g.l.c., p.f. and $^1\text{H-nmr}$) given by epi-lupeol.

B. carterii

The neutral extract was similarly fractionated to give epi-lupeol acetate (ca. 2% yield), a mixture of α - and β -amyrins (ca. 8% yield), recognized only by $^1\text{H-nmr}$ and ms of the mixture, epi-lupeol (ca. 10% yield) and a triterpene (ca. 12% yield), that we have identified as tirucallosol. It crystallized from MeOH and had m.p. 130-2° [Lit. 133-134.5° (Haines and Warren, 1949)]; the mass spectrum contained a molecular ion at m/z 426 corresponding to a tetracyclic triterpene with two double bonds; the 270-MHz $^1\text{H-nmr}$ spectrum, δ 0.764s, 0.809s, 0.874s, 0.926d (J= 6.5 Hz), 0.961s, 1.011s, 1.611s, 1.691s, 3.252dd (J= 10.5 and 3.5 Hz, 3 α -H) and 5.110 (broad triplet, J= 7.0 Hz, H-24) was virtually identical with that of an authentic sample of tirucallosol kindly provided by Dr. G. Palumbo of the University of Naples. The $[\alpha]_D$ (c, 4; benzene) was -12.5°. In the literature tirucallosol is reported to have a positive rotation, $[\alpha]_D$ +4.5° (Haines and Warren, 1949).

The $^{13}\text{C-nmr}$ spectrum C_1 : 35.5, C_2 : 27.8, C_3 : 79.2, C_4 : 37.4, C_5 : 51.1, C_6 : 19.1, C_7 : 28.1, C_8 : 133.6, C_9 : 134.3, C_{10} : 134.3, C_{11} : 21.5, C_{12} : 28.1,

C_{13} : 44.3, C_{14} : 50.0, C_{15} : 31.0, C_{16} : 30.0, C_{17} : 50.1, C_{18} : 15.6, C_{19} : 20.2, C_{20} : 36.3, C_{21} : 18.8, C_{22} : 36.5, C_{23} : 25.1, C_{24} : 125.3, C_{25} : 130.6, C_{26} : 25.6, C_{27} : 17.6, C_{28} : 15.6, C_{29} : 28.1, C_{30} : 24.1; assignments based on the model compound euphenol (Wehrli and Nishide, 1979) and the isooctene side chain in similar molecular environment (Lucaks *et al.*, 1972) was fully consistent with a tirucalloy structure; the euphol (the 20-epimer of tirucalloy) structure could be discarded mainly because of the m.p. [Lit. 116° (Warren and Watling, 1958)] and the $[\alpha]_D$ value [Lit. $[\alpha]_D +32^\circ$ (Warren and Watling, 1958)]. At this point of our analysis we decided to re-purify our sample by h.p.l.c. (Whatman μ -porasil column; eluant, hexane/ethyl ether, 75:25, Model 401 differential refractometer detector, M6000A pump, U6K injector, all from Waters Associates).

The m.p. of the re-purified sample was 135-137°, but the rotation was still negative ($[\alpha]_D = -10.5^\circ$). Oxidation with Jones reagent gave a 3-cheto derivative (Warren and Watling, 1958), which showed an intense positive c.d. curve ($[\theta] +2540$) in agreement with a 5 α -H absolute stereochemistry (Crabbé, 1968). Furthermore the acetate of our sample had m.p. 162-164° and $[\alpha]_D -14.5^\circ$ (c, 1 benzene) [Lit. (Haines and Warren, 1949) m.p. 163.5°, $[\alpha]_D = -16.7^\circ$].

Small impurities in our sample could account for the rotation values of the free alcohol. A series of other components of the resin from *B. carterii* await to be investigated.

Acknowledgements.- We thank Drs. Ahmed Maye and Ibrahîm (Physical Chemistry section of the Faculty of Chemistry, National University of Somalia) for 60-MHz n.m.r. measurements and Dr. Ali Warsame (Analytical section) for his assistance in g.l.c. measurements.

References

Crabbé P. (1968) "Applications de la dispersion rotatoire optique et du dichroïsme circulaire optique en chimie organique", pag.205, Gauthiers-Villars, Paris.

Devon T.K. and Scott A.J. (1972) "Handbook of Naturally Occurring Compounds" vol.II (Terpenes); Academic Press, New York and London.

Haines D.W. and Warren F.L. (1949) The Euphorbia Resins. Part II. The Isolation of taraxasterol and a new triterpene, Tirucalol, from E.tirucalli, J.C.S., 2554.

Lucaks G., Khuong-Huu F., Bennett C.R., Buckwelter and Wenkerp E. (1972) Carbon-13 Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy of Naturally Occurring Substances. Lanosterol and Dihydrolanosterol. Tetrahedron Letters, 3515.

Proietti G., Strappaghetta G. and Corsano S. (1981) Triterpenes of Boswellia freerana, Planta Medica, 41, 417.

Tursh B. and Tursh E. (1961) Triterpenes of the latex of Bursera. Bull.Soc. Chim.Belges, 70, 585.

Warren F.L. and Watling K.H. (1958) The Euphorbia Resins. Part X. The Structural difference between Euphol and Tirucalol. J.C.S., 179.

Wehrli F.W. and Nishide T. (1979) in "Progress in Chemistry of Organic Natural Products" vol. 3; pp.1-229 (ed. by Hertz W., Grisebach H. and Kirhy G.W.), Springer-Verlag.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, R. Nicolaus, L. Jannelli.

MISURABILITA' E SPAZI-KD DI FUNZIONI VETTORIALI

Mario A. Puglisi (*)

Presentata dal socio C. Ciliberto

Adunanza del 5 maggio 1984

Summary. The notion of measurability of J. Mikusiński [9] is used here in connection with so-called KD-spaces of vector valued functions. Some relations with the measurability with respect to a δ -ring are shown and, as an application, some characterizations of spaces of the same type are given.

Introduzione.

Il concetto di misurabilità per funzioni a valori in uno spazio di Banach reale indicato da J. Mikusiński [9] in riferimento ad un integrale-HEM viene qui utilizzato assumendo quale punto di partenza uno spazio vettoriale \mathcal{L} di funzioni definite in un insieme E ed a valori in uno spazio normato sul corpo reale Y verificante i seguenti assiomi ⁽¹⁾ :

(*) Università degli Studi di Bari, Dipartimento di Matematica.

(¹) Per il significato del simbolo $f \wedge g$ che sostituisce qui il simbolo $f \cdot g$ di [9] e per quello dei simboli $|f|$ e, successivamente, $(f : \phi)$ si rimanda al successivo n. 1 .

K se $f \in \mathcal{L}$ e $g \in \mathcal{L}$, allora $f \wedge g \in \mathcal{L}$

D se $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \rightarrow f$ ed esiste $g \in \mathcal{L}$ tale che $|f_n| \leq |g|$,
allora $f \in \mathcal{L}$

(brevemente spazio-KD di funzioni di E in Y). La nozione di misurabilità che così si ottiene in astratto, attraverso l'uso del seguente assioma,

P se $f_n \in \mathcal{L}$ e $f_n \rightarrow f$, allora $f \in \mathcal{L}$,

permette di fornire in termini di sottospazi vettoriali solidi una caratterizzazione degli spazi-KD in un ordine di idee già indicato nel caso reale in [1]. Nell'ipotesi non essenziale che Y contenga \mathbb{R} quale suo sottospazio, attraverso l'uso degli ulteriori assiomi

M. se $f \in \mathcal{L}$, allora $|f| \in \mathcal{L}$

S se f è costante e $|f| \equiv 1$, allora per ogni $g \in \mathcal{L}$ si ha
 $f \wedge g \in \mathcal{L}$,

la stessa viene successivamente approfondita in relazione alla nozione di misurabilità secondo M.H. Stone per funzioni reali (cfr. [10],[11] e [13]) provando tra l'altro che l'assioma S equivale alla congiunzione dei seguenti due assiomi reciprocamente indipendenti (2)

S' se $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $y \in Y$, allora per ogni $g \in \mathcal{L}$ si ha $(\phi \cdot y) \wedge g \in \mathcal{L}$

S'' se $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $f \in \mathcal{L}$, allora per ogni $g \in \mathcal{L}$ si ha $(f \cdot \phi) \wedge g \in \mathcal{L}$.

Formulato e studiato il suddetto concetto di misurabilità, per un più approfondito esame dello stesso si sono segnalate le relazioni intercorrenti con la nozione di misurabilità di tipo boreliano quale quella utilizzata in [4] e [7] rielaborando, a questo sco

(2) Se \mathcal{L} è un insieme non vuoto di funzioni di E in Y, allora si definiscono
 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{L} : f(E) \subset \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+ = \{\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} : 0 \leq \phi\}$

po, la nozione di misurabilità di tipo boreliano rispetto, questa volta, ad un δ -anello. Tra le conseguenze vengono indicate alcune estensioni al caso vettoriale dei risultati di [10] ed una caratterizzazione interna di certi spazi-KDMS.

Da ultimo, la nozione di misurabilità rispetto ad una misura positiva e finita per funzioni a valori in uno spazio di Banach reale (cfr. [5]) viene qui ottenuta quale caso particolare del concetto di misurabilità di cui sopra.

n.1. Funzioni misurabili rispetto ad uno spazio-KD di funzioni vettoriali.

In quanto segue E è un assegnato insieme, Y è uno spazio normato sul corpo reale \mathbb{R} includente questo quale sottospazio e $\mathcal{F}(E, Y)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni di E in Y . Per ogni $f \in \mathcal{F}(E, Y)$ $|f|$ è la funzione reale $x \mapsto \|f(x)\|$, mentre, se $\phi \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, allora $(f:\phi)$ è la funzione di E in Y definita assumendo $(f:\phi)(x) = 0$ se $\phi(x) = 0$ e $(f:\phi)(x) = (1/\phi(x)) \cdot f(x)$ se $\phi(x) \neq 0$. Posto, allora, $e_f = (f:|f|)$ e $N(f) = \{x \in E: f(x) \neq 0\}$ e denotata per ogni parte A di E con χ_A la funzione caratteristica di A , si ha che

$$(1.1) \quad f = |f| \cdot e_f$$

$$(1.2) \quad |e_f| = e_{|f|} = \chi_{N(f)}$$

$$(1.3) \quad e_{e_f} = e_f$$

$$(1.4) \quad \text{se } N(f) \cap N(g) = \emptyset, \text{ allora } e_{f+g} = e_f + e_g$$

$$(1.5) \quad \text{se } \phi \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}), \text{ allora } e_{\phi \cdot f} = e_\phi \cdot e_f$$

$$(1.6) \quad \text{se } \phi \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}) \text{ e } 0 \leq \phi, \text{ allora } e_{(f:\phi)} = (e_f : e_\phi)$$

$$(1.7) \quad \text{se } f_n \rightarrow f, \text{ allora } \chi_{N(f)} \cdot e_{f_n} \rightarrow e_f$$

Posto, inoltre, per ogni $f, g \in \mathcal{F}(E, Y)$, $f \wedge g = \inf(|f|, |g|) \cdot e_f$, si ha che

$$(1.8) \quad |f \wedge g| = \inf(|f|, |g|) = |f| \wedge g$$

(1.9) se $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, allora $(\lambda \cdot f) \cdot \wedge g = \lambda \cdot (f \cdot \wedge (1/\lambda) \cdot g)$

(1.10) $f \cdot \wedge (g \cdot \wedge h) = (f \cdot \wedge g) \cdot \wedge h$

(1.11) se $f_n \rightarrow f$ (rispettiv. $g_n \rightarrow g$), allora

$f_n \cdot \wedge g \rightarrow f \cdot \wedge g$ (rispettiv. $f \cdot \wedge g_n \rightarrow f \cdot \wedge g$).

Ciò premesso, sia \mathcal{L} uno spazio-KD di funzioni di E in Y . Si dice che una funzione f di E in Y è misurabile rispetto a \mathcal{L} se per ogni $g \in \mathcal{L}$ risulta $f \cdot \wedge g \in \mathcal{L}$. L'insieme delle funzioni di E in Y misurabili rispetto a \mathcal{L} si denota con il simbolo $\mathcal{M}(\mathcal{L})$. Ulteriormente, se \mathcal{L} e \mathcal{M} sono insiemi non vuoti di funzioni di E in Y tali che $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$, allora si dice che \mathcal{L} è solido in \mathcal{M} per esprimere che da $f \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{L}$ e $|f| \leq |g|$ consegue $f \in \mathcal{L}$.

Teorema 1.1. Se \mathcal{L} è uno spazio-KD di funzioni di E in Y , allora $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ è il più grande spazio-KP di funzioni di E in Y nel quale \mathcal{L} è un sottoinsieme solido.

Dim. L'assioma K riferito a \mathcal{L} esprime che $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}(\mathcal{L})$ mentre, a causa di (1.10), $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ medesimo verifica l'assioma K. Se, poi, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$, $g \in \mathcal{L}$ e $|f| \leq |g|$, risulta $f \cdot \wedge g = f$ e, quindi, $f \in \mathcal{L}$. Pertanto \mathcal{L} è solido in $\mathcal{M}(\mathcal{L})$. Si prova, inoltre che $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ è uno spazio-KP adoperando (1.8), (1.9), (1.11) e seguendo le tecniche dei n. 2 e 3 del Chap. VI di [9]. Se, da ultimo, \mathcal{M} è uno spazio vettoriale di funzioni di E in Y contenente \mathcal{L} , verificante l'assioma K e nel quale \mathcal{L} è un sottoinsieme solido allora, fissato $f \in \mathcal{M}$, per ogni $g \in \mathcal{L}$ si ha $f \cdot \wedge g \in \mathcal{M}$ e, quindi, per (1.8), $f \cdot \wedge g \in \mathcal{L}$ donde $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$.

Corollario 1. Se \mathcal{L} è uno spazio-KD di funzioni di E in Y , risulta

$$(1.12) \quad \mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathcal{L})) = \mathcal{M}(\mathcal{L}).$$

Corollario 2. Un insieme \mathcal{L} di funzioni di E in Y è uno spazio-KD se e soltanto se esiste uno spazio-KP di funzioni di E in Y nel quale \mathcal{L} è un sottospazio vettoriale solido.

Teorema 1.2. Se \mathcal{L} è uno spazio-KD di funzioni di E in Y, allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (a) \mathcal{L} verifica l'assioma M
- (b) $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ verifica l'assioma M
- (c) esiste uno spazio-KPM di funzioni di E in Y nel quale \mathcal{L} è un sottoinsieme solido.

Dim. Se è vera (a) e $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$, allora a causa di (1.8) per ogni $g \in \mathcal{L}$ si ha $|f| \wedge g \in \mathcal{L}$, quindi, $|f| \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$. Pertanto è vera (b). Se è vera (b), allora è vera (c) a causa del teor. 1.1. Se, infine, è vera (c) e \mathcal{M} è lo spazio-KPM previsto in (c), allora per ogni $f \in \mathcal{L}$ si ha $|f| \in \mathcal{M}$, quindi, essendo \mathcal{L} solido in \mathcal{M} , anche $|f| \in \mathcal{L}$ cioè è vera (a).

Corollario. Un insieme \mathcal{L} di funzioni di E in Y è uno spazio-KDM se e soltanto se esiste uno spazio-KPM di funzioni di E in Y nel quale \mathcal{L} è un sottospazio vettoriale solido.

In riferimento al più piccolo spazio-KPM di funzioni di E in Y contenente un assegnato spazio-KDM si segnala il seguente

Teorema 1.3. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDM di funzioni di E in Y, allora, posto

(1.13) $\mathcal{B}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{L}) : \text{esiste } \phi_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+, \phi_n \leq \phi_{n+1}, \text{ tale che } f \wedge \phi_n \rightarrow f\}$,
 $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ risulta il più piccolo spazio-KPM di funzioni di E in Y contenente \mathcal{L} . Inoltre \mathcal{L} è solido in $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ e si ha $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathcal{L}))$.

Dim. Se $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$, allora $f \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$ se e soltanto se $\inf(|f|, \phi_n) \nearrow |f|$ per qualche $\phi_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ tale che $\phi_n \leq \phi_{n+1}$. Pertanto, a causa della prop. 1 del §5 di [10], l'asserto consegue facilmente dai teor. 1.1 e 1.2 osservando che $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ è costituito da tutte e sole le funzioni di E in Y che sono limiti di successioni convergenti di elementi di \mathcal{L} .

E' fondamentale il seguente teorema la cui dimostrazione si ot

tiene adattando quella del teor. 3.8 del Cap. VI di [9].

Teorema 1.4. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDM di funzioni di E in Y, allora per ogni $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ e per ogni $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ risulta $\phi \cdot e_f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ e $e_{\phi} \cdot f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$.

Osservazione 1. Se uno spazio vettoriale \mathcal{L} di funzioni di E in Y verifica l'assioma K (rispettiv. D o P) allora anche $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ verifica l'assioma K (rispettiv. D o P). Inoltre \mathcal{L} verifica l'assioma M se e soltanto se per ogni $f \in \mathcal{L}$ risulta $|f| \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e, in tal caso, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E. A questo riguardo, adoperando la terminologia di [10], si noti che uno spazio di Riesz-Lebesgue (rispettiv. Riesz-Baire) di funzioni reali definite in E è uno spazio di Riesz verificante l'assioma D (rispettiv. P). Nel seguito se \mathcal{L} è uno spazio di Riesz-Lebesgue di funzioni reali definite in E, allora con $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ si denota lo spazio di Riesz-Baire delle funzioni reali misurabili secondo M. H. STONE rispetto a \mathcal{L} (cfr. §3 di [10]).

Teorema 1.5. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDM di funzioni di E in Y, allora $\mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$.

Dim. Invero $\mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ coincide con l'insieme delle funzioni reali misurabili rispetto a $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Basta, allora, osservare, che questo al pari di $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali contenente $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

Corollario. Se \mathcal{L} è uno spazio di Riesz-Lebesgue di funzioni reali definite in E verificante l'assioma K, allora $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}(\mathcal{L})$.

Osservazione 2. Se \mathcal{L} è uno spazio-KD di funzioni di E in Y, allora l'assioma S si esprime come segue

S se f è costante e $|f| \equiv 1$, allora $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$

e, quindi (cfr. teor. 1.1), lo stesso esprime che le funzioni costanti sono misurabili rispetto a \mathcal{L} .

Teorema 1.6. Se \mathcal{L} è uno spazio-KD di funzioni di E in Y, allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (a) \mathcal{L} verifica l'assioma S
- (b) $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ verifica l'assioma S
- (c) esiste uno spazio-KPS di funzioni di E in Y nel quale \mathcal{L} è un sottoinsieme solido.

Dim. Se è vera (a), allora è vera (b) a causa del coroll. 1 del teor. 1.1 mentre se è vera (b), allora è vera (c) a causa dello stesso teor. 1.1. Se, infine, è vera (c) e \mathcal{M} è lo spazio-KPS previsto in (c), allora per ogni funzione costante f e per ogni $g \in \mathcal{L}$ risulta $f \wedge g \in \mathcal{M}$ e, quindi, a causa di (1.8), $f \wedge g \in \mathcal{L}$.

Corollario. Un insieme \mathcal{L} di funzioni di E in Y è uno spazio-KDS se e soltanto se esiste uno spazio-KPS di funzioni di E in Y nel quale \mathcal{L} è un sottospazio vettoriale solido.

Osservazione 3. Se \mathcal{L} è uno spazio vettoriale di funzioni di E in Y verificante l'assioma S, allora per ogni $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ risulta che $\inf(1, \phi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Conseguentemente se \mathcal{L} è uno spazio-KDMS, tenuto conto del teor. 1.5, dell'osserv. 1, del teor. 2 del §4 di [10] e del suo coroll. 1, allora una funzione reale ϕ definita in E è misurabile rispetto a \mathcal{L} se e soltanto se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme degli $x \in E$ tali che $\alpha < \phi(x)$ (cioè la sua funzione caratteristica) è misurabile rispetto a \mathcal{L} . Il teor. 6.3 del Chap.VI di [9] si ottiene, allora, quale conseguenza.

In riferimento al caso scalare sussiste il seguente

Teorema 1.7. Se \mathcal{L} è uno spazio di Riesz- Lebesgue di funzioni reali definite in E, allora \mathcal{L} verifica l'assioma S se e soltanto se \mathcal{L} verifica la proprietà di Stone. In questo caso \mathcal{L} verifica anche l'assioma K e si ha $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}(\mathcal{L})$.

Dim. La condizione è necessaria in quanto, se $0 \leq \phi$, allora $\inf(1, \phi) = 1 \wedge \phi$. Se, poi, \mathcal{L} verifica la proprietà di Stone, allora

a causa del teor. 3.1 di [11], per ogni $\phi \in \mathcal{L}$ risulta $e_\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ e, quindi, a causa della prop. 3 del §5 di [10], per ogni $\phi \in \mathcal{L}$ e per ogni $\psi \in \mathcal{L}$ risulta $\phi \cdot \wedge \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ nonché $\phi \cdot \wedge \psi \in \mathcal{L}$. Conseguente che \mathcal{L} verifica l'assioma K e, quindi, per il coroll. del teor. 1.5 si ha $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}(\mathcal{L})$ e \mathcal{L} verifica l'assioma S.

Proseguiamo lo studio dell'assioma S attraverso il successivo

Lemma. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDMS di funzioni di E in Y , allora per ogni $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ e per ogni $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ si ha $\phi \cdot f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$.

Dim. Tenuto conto del teor. 1.5, dell'osserv.1, del teor. 1.2 ed a causa della prop. 5 del §3 di [10], si ha $\phi \cdot |f| \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ e, quindi, essendo $\phi \cdot f = (\phi \cdot |f|) \cdot e_f$, risulta $\phi \cdot f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ a causa del teor.1.4.

Osservazione 4. Se \mathcal{L} è uno spazio-KD di funzioni di E in Y , allora gli assiomi S' e S'' si esprimono come segue:

S' se $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $y \in Y$, allora $\phi \cdot y \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$

S'' se $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $f \in \mathcal{L}$, allora $(f:\phi) \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$;

se \mathcal{L} verifica anche l'assioma M allora l'assioma S' esprime che se $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $y \in Y$, allora $\phi \cdot y \in \mathcal{L}$.

Teorema 1.8. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDM di funzioni di E in Y , allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (a) \mathcal{L} verifica l'assioma S
- (b) se $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$, allora per ogni $y \in Y$ si ha $\phi \cdot y \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ e per ogni $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ si ha $(f:\phi) \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$
- (c) \mathcal{L} verifica gli assiomi S' e S''
- (d) \mathcal{L} verifica l'assioma S' e $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ verifica la proprietà di Stone.

Dim. Sia vera (a) e sia $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$. Se $y \in Y$ e $c(x)=y$ per ogni $x \in E$, allora $c \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ e, quindi, per il lemma precedente, $\phi \cdot c \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$. Se, poi, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ e se $0 \leq \phi$, allora, a causa del teor. 1.5 e per il teor. 3.1 di [11], risulta $(|f|:\phi) \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ e, quindi, $\inf((|f|:\phi), |g|) \in \mathcal{L}$ per ogni $g \in \mathcal{L}$. Da qui, essendo, per (1.6),

$(f:\phi) \wedge g = \inf(|f:\phi|, |g|) \cdot e_f$ e tenendo conto del teor. 1.4, consegue che $(f:\phi) \wedge g \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ e, quindi, $(f:\phi) \wedge g \in \mathcal{L}$. Poiché quando ϕ è arbitraria si ha $(f:\phi) = (f:\phi^+) - (f:\phi^-)$, si conclude che (b) è vera. Ovviamente (b) \Rightarrow (c) mentre se \mathcal{L} verifica l'assioma S'', allora, considerate ϕ e ψ in $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, risulta $(\phi:\psi) \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ e, quindi, ancora a causa del teor. 1.5 e per il teor. 3.1 di [11], $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ verifica la proprietà di Stone. Da ultimo sia vera (d) e sia f una funzione costante di E in Y tale che $|f| \equiv 1$. Per ogni $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ si ha, allora (cfr. osserv. 4), $f \wedge \phi \in \mathcal{L}$ in quanto è $f \wedge \phi = \inf(1, \phi) \cdot f$.

Osservazione 5. Il teorema precedente costituisce una estensione al caso vettoriale del teor. 3.1 di [11].

Corollario 1. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDMS di funzioni di E in Y , allora per ogni $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ risulta $e_f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$.

Corollario 2. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDMS di funzioni di E in Y , allora per ogni funzione f di E in Y le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (a) $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$
- (b) esiste $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ tale che $(f:\phi) \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$
- (c) esiste $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ tale che $\phi \cdot f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$.

Dim. Basta assumere $\phi = |f|$ per provare che (a) \Rightarrow (b) e (a) \Rightarrow (c) ed osservare che $f = \phi \cdot (f:\phi)$ e $f = ((\phi \cdot f):\phi)$ per provare che (b) \Rightarrow (a) e (c) \Rightarrow (a).

Corollario 3. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDMS di funzioni di E in Y , allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (a) per ogni $f \in \mathcal{L}$ e per ogni $y' \in Y'$ si ha $y' \circ f \in \mathcal{L}$
- (b) per ogni $f \in \mathcal{L}$ e per ogni $y' \in Y'$ si ha $y' \circ f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$
- (c) per ogni $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ e per ogni $y' \in Y'$ si ha $y' \circ f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$.

Dim. Se è vera (b) e se $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$, $y' \in Y'$ e $0 \leq \phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, allora, essendo

$$(y' \circ f) \wedge \phi = ((|f| \cdot (y' \circ (f \wedge \phi))) : \inf(|f|, \phi)) \wedge \phi,$$

a causa del teorema precedente e del lemma ad esso preliminare risulta $(y' \circ f) \wedge \phi \in \mathcal{L}$ e, quindi $y' \circ f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ cioè $(b) \Rightarrow (c)$. Se è vera (c) e se $f \in \mathcal{L}$, $y' \in Y'$ e $0 \leq M \in \mathbb{R}$ tale che $|y'(y)| \leq M \cdot \|y\|$ per ogni $y \in Y$, allora si ha $|y' \circ f| \leq M \cdot |f|$ e, quindi, $y' \circ f \in \mathcal{L}$ cioè $(c) \Rightarrow (a)$.

Corollario 4. Un insieme \mathcal{L} di funzioni di E in Y è uno spazio-KDMS se e soltanto se sono verificate le seguenti condizioni:

1. se $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$, allora $\sup(\phi, \psi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ e, inoltre, se $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}_+$ e $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$, allora $\alpha \cdot \phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$
2. esiste uno spazio-KPM \mathcal{M} di funzioni di E in Y tale che
 - 2.1. se $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $y \in Y$, allora $\phi \cdot y \in \mathcal{M}$
 - 2.2. se $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ e $f \in \mathcal{M}$, allora $(f: \phi) \in \mathcal{M}$ e $\phi \cdot f \in \mathcal{M}$
 - 2.3. $f \in \mathcal{L}$ se e soltanto se esiste $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ tale che $|f| \leq \phi$ e $(f: \phi) \in \mathcal{M}$.

Dim. La necessità di 1 e 2 consegue dal teorema precedente e dal lemma ad esso preliminare adoperando i teoremi 1.1 e 1.2. Per provare la sufficienza, osservato che a causa di 2.2 e 2.3 \mathcal{L} risulta un sottoinsieme di \mathcal{M} solido in \mathcal{M} , adoperando 1 e 2.3 si prova che \mathcal{L} è un sottospazio vettoriale di \mathcal{M} e, quindi, per il corollario del teor. 1.2, lo stesso risulta uno spazio-KDM. Per 2.1 e ancora per il teor. 1.1 \mathcal{L} verifica, allora, l'assioma S'. Inoltre se $0 \leq \phi$, allora $\inf(1, \phi) = \inf((\phi: \phi), \phi)$ e, quindi, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ verifica la proprietà di Stone e \mathcal{L} , a causa del teorema precedente, verifica l'assioma S.

In riferimento agli assiomi S' e S'' si segnalano i seguenti esempi

Esempio 1. Siano x e y oggetti distinti, sia $E = \{x, y\}$, sia $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $1 < \alpha$ e sia $\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{F}(E, Y) : \alpha \cdot f(x) = f(y)\}$. \mathcal{L} è, allora, uno spazio-KPM (e, quindi, uno spazio-KDM) di funzioni di E in Y . Inoltre \mathcal{L} verifica l'assioma S' mentre non verifica l'assioma S''.

Esempio 2. Sia E l'insieme dell'es. 1 e sia $\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{C}) : f(x) \in \mathbb{R}\}$.

\mathcal{L} è, allora, uno spazio-KPM (e, quindi, uno spazio-KDM) di funzioni di E in \mathbb{C} . Inoltre \mathcal{L} verifica l'assioma S'' mentre non verifica l'assioma S' .

Osservazione 6. L'assioma S' (rispettiv. S'') è dunque indipendente dagli assiomi K, P, M e S'' (rispettiv. S') e, quindi, dagli assiomi K, D, M e S'' (rispettiv. S') mentre l'assioma S (cfr. teor. 1.8) è indipendente dagli assiomi K, P e M e, quindi, dagli assiomi K, D e M . Ulteriori semplici esempi permettono di provare l'indipendenza dell'assioma M dagli assiomi K, P e S e, quindi, dagli assiomi K, D e S nonché l'indipendenza dell'assioma D e, quindi, dell'assioma P dagli assiomi K, M e S . Un esempio che prova l'indipendenza dell'assioma K dagli assiomi D, M e S si trova nel n.2 del Cap.VII di [9].

n.2. Funzioni misurabili rispetto ad un δ -anello di parti di un insieme.

Sia, adesso, \mathcal{U} un δ -anello di parti di E , sia $\sigma(\mathcal{U})$ il σ -anello da esso generato e sia $\mathcal{U}^{(\mathbb{L})}$ la σ -algebra delle parti di E localmente misurabili rispetto ad \mathcal{U} . Fermo restando Y lo spazio normato di cui sopra e denotata con $\mathcal{B}(Y)$ la σ -algebra degli insiemi di Borel di Y , una funzione f di E in Y si dice misurabile rispetto ad \mathcal{U} se sono verificate le seguenti condizioni:

- (m₁) per ogni $B \in \mathcal{B}(Y)$ si ha $\bar{f}^{-1}(B) \in \mathcal{U}^{(\mathbb{L})}$
- (m₂) $f(E)$ è separabile
- (m₃) $N(f) \in \mathcal{U}$.

L'insieme delle funzioni di E in Y misurabili rispetto ad \mathcal{U} è qui denotato con il simbolo $m_Y(\mathcal{U})$ e si pone, per brevità, $m(\mathcal{U}) = m_{\mathbb{R}}(\mathcal{U})$.

Osservazione 1. Si ha $\mathcal{U}^{(\mathbb{L})} = \sigma(\mathcal{U})^{(\mathbb{L})} = (\mathcal{U}^{(\mathbb{L})})^{(\mathbb{L})}$ mentre $m_Y(\mathcal{U}) \subset m_Y(\sigma(\mathcal{U})) \subset m_Y(\mathcal{U}^{(\mathbb{L})})$. Inoltre $m_Y(\mathcal{U})$ è solido in $m_Y(\sigma(\mathcal{U}))$ e

e questo è solido in $m_Y(\mathcal{U}^{(\mathbb{R})})$.

Osservazione 2. Una funzione f di E in Y verifica (m_1) se e soltanto se per ogni insieme aperto (rispettiv. chiuso) U di Y risulta $\bar{f}^{-1}(U) \in \mathcal{U}^{(\mathbb{R})}$. Conseguentemente lo spazio di Riesz-Lebesgue delle funzioni reali misurabili rispetto ad \mathcal{U} nel senso di [10] coincide con $m(\mathcal{U})$ e questo con $(m_Y(\mathcal{U}))_{\mathbb{R}}$.

Osservazione 3. Una funzione f di E in Y verifica (m_1) e (m_3) se e soltanto se per ogni $B \in \mathcal{B}(Y)$ si ha $N(f) \cap \bar{f}^{-1}(B) \in \mathcal{U}_0$, equivalentemente, se e soltanto se per ogni insieme aperto (rispettiv. chiuso) U di Y risulta $N(f) \cap \bar{f}^{-1}(U) \in \mathcal{U}$.

Osservazione 4. Se f verifica (m_1) , allora $N(f) \in \mathcal{U}^{(\mathbb{R})}$ mentre se f assume un insieme numerabile di valori, allora f verifica (m_1) se e soltanto se $\bar{f}^{-1}(y) \in \mathcal{U}^{(\mathbb{R})}$ per ogni $y \in f(E)$.

Osservazione 5. Se $f_n \rightarrow f$ e se le f_n verificano (m_1) (rispettiv. (m_2)), allora anche f verifica (m_1) (rispettiv. (m_2)) (cfr. lem. 1.2 di [7]) mentre se le f_n verificano (m_1) e (m_3) , allora (cfr. osserv. 4) risulta $N(f) \in \sigma(\mathcal{U})$.

Lemma 2.1. Se una funzione f di E in Y verifica m_2 , allora f verifica m_1 se e soltanto se per ogni sfera aperta (rispettiv. chiusa) B di Y risulta $\bar{f}^{-1}(B) \in \mathcal{U}^{(\mathbb{R})}$.

Dim. Si supponga che per ogni sfera chiusa B di Y si abbia $\bar{f}^{-1}(B) \in \mathcal{U}^{(\mathbb{R})}$. Allora, se F è un insieme chiuso di Y e $A \in \mathcal{U}$, per provare che $\bar{f}^{-1}(F) \cap A \in \mathcal{U}$ basta osservare che a causa di (m_2) esiste una parte numerabile K di Y tale che $\bar{f}^{-1}(F) \cap A = \bar{f}^{-1}(K) \cap A$.

Si prova, analogamente, l'ulteriore

Lemma 2.2. Se una funzione f di E in Y verifica (m_2) ed \mathcal{U} è un σ -anello di parti di E allora f è misurabile rispetto ad \mathcal{U} se e soltanto se per ogni sfera aperta (rispettiv. chiusa) B di Y risulta $N(f) \cap \bar{f}^{-1}(B) \in \mathcal{U}$. Se, di più, \mathcal{U} è una σ -algebra di parti di E al-

lora f è misurabile rispetto ad \mathcal{U} se e soltanto se per ogni sfera aperta (rispettiv. chiusa) B di Y risulta $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$.

Osservazione 6. Evidentemente \mathcal{U} è una σ -algebra se e soltanto se le funzioni costanti di E in Y sono misurabili rispetto ad \mathcal{U} .

E di ovvia dimostrazione il seguente

Lemma 2.3. Se f è una funzione di E in Y verificante (m_1) e (m_2) , se Z è un ulteriore spazio normato su \mathbb{R} e se u è una funzione continua di Y in Z , allora anche $u \circ f$ verifica (m_1) e (m_2) . Se, di più, f verifica (m_3) ed u è lineare allora anche $u \circ f$ verifica (m_3) .

Lemma 2.4. Se Y_1 e Y_2 sono spazi normati su \mathbb{R} e se f_i è una funzione di E in Y_i misurabile rispetto ad \mathcal{U} per $i=1,2$, allora la funzione $f = x \rightarrow (f_1(x), f_2(x))$ è misurabile rispetto ad \mathcal{U} .

Dim. Invero f verifica (m_1) e (m_2) (cfr. Prop.1 del §2 di [4]) nonché (m_3) essendo $N(f) = N(f_1) \cup N(f_2)$.

Lemma 2.5. Se $f \in m(\mathcal{U})$, allora $|f| \in m(\mathcal{U})$. Inoltre, se $\phi \in m(\mathcal{U})$ (rispettiv. $\phi \in m(\mathcal{U}^{(L)})$) e $f \in m_Y(\mathcal{U}^{(L)})$ (rispettiv. $f \in m_Y(\mathcal{U})$), allora $\phi \cdot f \in m_Y(\mathcal{U})$.

Osservazione 7. Come in [7] una funzione elementare rispetto ad \mathcal{U} è una funzione f di E in Y tale che per ogni $x \in E$ si abbia $f(x) = \sum_n \chi_{A_n}(x) \cdot y_n$ dove $(A_n)_n$ è una successione di elementi di \mathcal{U} a due a due disgiunti e $(y_n)_n$ è una successione di elementi di Y . Le funzioni semplici (rispettiv. elementari) rispetto ad \mathcal{U} sono misurabili rispetto ad \mathcal{U} (rispettiv. a $\sigma(\mathcal{U})$) mentre (cfr. lem.1.3 di [7]) ogni funzione misurabile rispetto a $\sigma(\mathcal{U})$ è limite (uniforme) di una successione di funzioni elementari rispetto ad \mathcal{U} . Il limite puntuale di una successione di funzioni elementari rispetto ad \mathcal{U} verifica (m_1) e (m_2) (cfr. osserv. 4 e 5) mentre se f è elementare rispetto ad \mathcal{U} allora anche e_f è elementare rispetto

ad \mathcal{U} .

Lemma 2.6. Se $\phi \in m(\mathcal{U})$ e $f \in m_Y(\mathcal{U})$, allora $(f:\phi) \in m_Y(\mathcal{U})$.

Dim. Proviamo preliminarmente che se $f \in m_Y(\mathcal{U})$ allora $e_f \in m_Y(\mathcal{U})$. Invero, sia $f \in m_Y(\mathcal{U})$ e (cfr. osserv.7) sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni elementari rispetto ad \mathcal{U} tale che $f_n \rightarrow f$. Poiché e_{f_n} e, quindi, anche $\chi_{N(f)} \cdot e_{f_n}$ è elementare rispetto ad \mathcal{U} , a causa di (1.7) si ha che (cfr. osserv.7) e_f verifica (m_1) e (m_2) . Essendo, poi, $N(e_f) = N(f)$, si ha anche $N(e_f) \in \mathcal{U}$. Siano, ora, ϕ e f quelle previste nell'asserto. A causa del teor.3.1 di [11], della prop. 3 del §1 di [10], del precedente lem.2.5 e del teor.1 del §4 di [10] si ha $(|f|:\phi) \in m(\mathcal{U}^{(k)})$. Essendo $(f:\phi) = (|f|:\phi) \cdot e_f$, si deduce che $(f:\phi) \in m(\mathcal{U})$ utilizzando quanto si è premesso ed ancora il lem.2.5.

Teorema 2.1. $m_Y(\mathcal{U})$ è uno spazio-KDMS di funzioni di E in Y.

Dim. Dai lemmi 2.4 e 2.5 consegue che (cfr. osserv.6) $m_Y(\mathcal{U})$ è uno spazio vettoriale di funzioni di E in Y. Lo stesso verifica l'assioma M ancora per il lem.2.5 (cfr. osserv.2) e conseguentemente, per il lem.2.6 e sempre per il lem.2.5, l'assioma K. Se, poi, f è limite puntuale di una successione $(f_n)_n$ di funzioni misurabili rispetto ad \mathcal{U} e $g \in m_Y(\mathcal{U})$ tale che $|f_n| \leq |g|$ allora si ha (cfr. osserv.5) $f \in m_Y(\sigma(\mathcal{U}))$ e, quindi (cfr. osserv.1) $f \in m_Y(\mathcal{U})$. Da ultimo siano $\phi \in m(\mathcal{U})$, $y \in Y$ e $f \in m_Y(\mathcal{U})$. A causa del lem.2.5 si ha, allora (cfr. osserv.6), $\phi \cdot y \in m_Y(\mathcal{U})$. Pertanto, ancora per il lem.2.6, $m_Y(\mathcal{U})$ verifica gli assiomi S' e S'' e, quindi, per il teor. 1.8, l'assioma S.

Nel teorema che segue viene indicato un legame intercorrente fra funzioni misurabili rispetto ad uno spazio-KD di funzioni vettoriali e funzioni misurabili rispetto ad un δ -anello. Si notino preliminarmente i seguenti lemmi:

Lemma 2.7. Se una funzione f di E in Y verifica m_2 e m_3 , allora si ha $f \in m_Y(\mathcal{U})$ se e soltanto se per ogni $y' \in Y'$ risulta $y' \circ f \in m(\mathcal{U})$.

Dim. A causa del lem.2.3 basta provare la sufficienza. A questo scopo sia $\epsilon > 0$, sia $a \in Y$ e sia B' la sfera chiusa di centro a e raggio ϵ . Considerata, allora, una parte numerabile H di Y tale che $f(E) \subset \bar{H}$ e una successione $(y'_n)_n$ di elementi di Y' tale che per ogni n e per ogni $y \in \overline{H - \{a\}}$ si abbia $\|y'_n\| = 1$ e $\|y\| = \sup_n |y'_n(y)|$, per ogni $A \in \mathcal{U}$ risulta

$$A \cap \bar{f}^{-1}(B') = \bigcap_n (A \cap \overbrace{|y'_n \circ f - y'_n(a)|}^{-1}(\epsilon)) \neq \emptyset,$$

e, quindi, $A \cap \bar{f}^{-1}(B') \in \mathcal{U}$.

Lemma 2.8. Se una funzione f di E in Y verifica m_2 e per ogni $y' \in Y'$ si ha $N(y' \circ f) \in \sigma(\mathcal{U})$, allora è anche $N(f) \in \sigma(\mathcal{U})$.

Dim. Invero considerata una parte numerabile H di Y tale che $f(E) \subset \bar{H}$ e una successione $(y'_n)_n$ di elementi di Y' tale che per ogni n e per ogni $y \in \bar{H}$ si abbia $\|y'_n\| = 1$ e $\|y\| = \sup_n y'_n(y)$, risulta

$$N(f) = \bigcup_n N(y'_n \circ f).$$

In quanto segue se \mathcal{L} è un insieme non vuoto di funzioni di E in Y , allora si definisce $\mathcal{L}_S = \{f \in \mathcal{L} : f(E) \text{ è separabile}\}$.

Teorema 2.2. Si ha $(\mathcal{M}(m_Y(\mathcal{U})))_S = m_Y(\mathcal{U}^{(l)})$.

Dim. Sia $f \in m_Y(\mathcal{U}^{(l)})$ e sia $g \in m_Y(\mathcal{U})$. E', allora, per il teor. 2.1, $f \wedge g \in m_Y(\mathcal{U}^{(l)})$ donde, essendo $m_Y(\mathcal{U})$ solido in $m_Y(\mathcal{U}^{(l)})$, $f \wedge g \in m_Y(\mathcal{U})$ e, quindi $f \in (\mathcal{M}(m_Y(\mathcal{U})))_S$. Viceversa sia $f \in (\mathcal{M}(m_Y(\mathcal{U})))_S$. A causa del coroll.3 del teor.1.8, del teor.2.2 e del lem.2.3, per ogni $y' \in Y'$ si ha, allora, $y' \circ f \in \mathcal{M}(m_Y(\mathcal{U}))$ e, quindi, per il teor.1 del §4 di [10] e per il teor.1.5, $y' \circ f \in m(\mathcal{U}^{(l)})$. Per il lem.2.8 si ha, allora che $N(f) \in \mathcal{U}^{(l)}$ e, per il lem.2.7, che $f \in m_Y(\mathcal{U}^{(l)})$.

Osservazione 8. Il teorema precedente estende al caso vettoriale il teor.1 del §4 di [10].

Se \mathcal{L} è un insieme non vuoto di funzioni di E in Y allora si definisce $\mathcal{U}_{\mathcal{L}} = \{A \in E: \chi_A \in \mathcal{L}\}$ e si prende in esame la seguente condizione:

(*) se $f \in \mathcal{L}$ e $y' \in Y'$ allora $y' \circ f \in \mathcal{L}$.

Osservazione 9. Se \mathcal{L} è uno spazio-PM di funzioni di E in Y , allora $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ è un σ -anello di parti di E . Se, inoltre, \mathcal{L} verifica l'assioma S' e la condizione (*), se $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S$ e se, ancora, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ verifica la proprietà di Stone, allora si ha (cfr. osserv. 7) $m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}}) \subset \mathcal{L}$ mentre essendo per ogni $f \in \mathcal{L}$ e per ogni $y' \in Y'$ $y' \circ f \in m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}})$ (cfr. teor. 1 del § 2 di [10]), a causa dei lemmi 2.7 e 2.8 risulta $\mathcal{L} \subset m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}})$.

Teorema 2.3. Se \mathcal{L} è uno spazio-KDM di funzioni di E in Y , allora $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ è un δ -anello di parti di E . Se, inoltre, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S$, allora le seguenti due proprietà sono equivalenti:

(a) \mathcal{L} verifica l'assioma S e la condizione (*)

(b) $(M(\mathcal{L}))_S = m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}}^{(\mathcal{L})})$.

Dim. Essendo $\mathcal{U}_{\mathcal{L}} = \mathcal{U}_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ risulta un δ -anello di parti di E (cfr. § 2 di [10]). Si supponga (a) vera. A causa del teor. 2 del § 4 di [10] e dei teor. 1.5 e 1.8 si ha che $\mathcal{U}^{(\mathcal{L})} = \mathcal{U}_{(M(\mathcal{L}))_S}$. Si prova, inoltre, facilmente che $(M(\mathcal{L}))_S$ è uno spazio-PMS' e poichè, per il coroll. 3 del teor. 1.8, esso verifica la condizione (*) e, per i teor. 1.5 e 1.8 e la prop. 5 del § 3 di [10], $M(\mathcal{L})_{\mathbb{R}}$ verifica la proprietà di Stone, consegue la (b) per quanto si è notato nell'osserv. 9. Se, poi, è vera (b) e f è una funzione costante di E in Y allora (cfr. osserv. 6) si ha $f \in M(\mathcal{L})$ e, quindi, \mathcal{L} verifica l'assioma S . Se da ultimo, $f \in \mathcal{L}$ e $y' \in Y'$, allora a causa del lem. 2.3 risulta $y' \circ f \in M(\mathcal{L})$ e, quindi, \mathcal{L} verifica condizione (*) ancora per il coroll. 3 del teor. 1.8.

Osservazione 10. Il teorema precedente fornisce una estensione al caso vettoriale del coroll. 1 del teor. 2 del § 4 di [10]. Nel

corollario che segue viene indicata una caratterizzazione interna di certi spazi-KDMS.

Corollario. Un insieme non vuoto \mathcal{L} di funzioni di E in Y è uno spazio-KDMS verificante la condizione (*) e la condizione $\mathcal{L} = \mathcal{L}_s$ se e soltanto se sono verificate seguenti tre condizioni:

(b₁) $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ è un δ -anello di parti di E

(b₂) se $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ allora $\sup(\phi, \psi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ e, inoltre, se $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$, allora $\alpha \cdot \phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$.

(b₃) $f \in \mathcal{L}$ se e soltanto se $f \in m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}}^{(\mathbb{R})})$ ed esiste $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ tale che $|f| \leq \phi$

o, equivalentemente, le seguenti due condizioni:

(c₁) $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ è un δ -anello di parti di E

(c₂) \mathcal{L} è un sottospazio vettoriale solido in $m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}}^{(\mathbb{R})})$.

Dim. Per provare che le condizioni (b_i), $i=1,2,3$, sono necessarie si osservi che se $f \in \mathcal{L}$ allora, per il coroll.1 del teor.2 del §4 di [10]; per ogni $y' \in Y'$ si ha $y' \circ f \in m(\mathcal{U}_{\mathcal{L}}^{(\mathbb{R})})$. Per il lem. 2.8 si ha, allora, $N(f) \in \mathcal{U}_{\mathcal{L}}^{(\mathbb{R})}$ e, quindi, per il lem. 2.7, $f \in m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}}^{(\mathbb{R})})$. Reciprocamente, se $f \in m_Y(\mathcal{U}_{\mathcal{L}}^{(\mathbb{R})})$, allora per il teor. 2.3 si ha $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ e, quindi, $f \in \mathcal{L}$ se esiste $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^+$ tale che $|f| \leq \phi$. La sufficienza delle medesime condizioni è conseguenza del coroll.4 del teor. 1.8, tenendo conto dei risultati che precedono ed in particolare dei lemmi 2.5 e 2.6.

n.3. Funzioni misurabili rispetto ad una misura positiva e finita.

Sia, ora, \mathcal{U} un anello di parti di E , sia μ una misura positiva e finita su \mathcal{U} e sia Y uno spazio di Banach reale includente \mathbb{R} quale sottospazio. Come è noto (cfr. N.DINCULEANU [5]) l'insieme $\mathcal{M}_Y(\mu)$ delle funzioni di E in Y misurabili rispetto a μ è uno spazio-PM

mentre l'insieme $\mathcal{L}_Y^1(\mu)$ delle funzioni di E in Y integrabili rispetto a μ è uno spazio-DM e (cfr. prop.19 del § 8 di [5]) $\mathcal{L}_Y^1(\mu)$ è solido in $\mathcal{M}_Y(\mu)$. Ultimamente, posto $\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mu)$ e $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$, a causa del coroll.4 del teor.2 del § 5 di [5], del coroll.2 della prop. 9 del § 8 di [5], del coroll.1 del teor.2 del § 4 di [10] e ricordando che, ancora per la prop.19 del § 8 di [5], $\mathcal{L}^1(\mu)$ verifica la proprietà di Stone, si ha che

$$(3.1) \quad \mathcal{M}(\mu) = \mathcal{S}(\mathcal{L}^1(\mu)) .$$

Pertanto, se $f \in \mathcal{M}_Y(\mu)$, allora a causa del teor. 3.1 di [11] si ha $(1:|f|) \in \mathcal{M}(\mu)$ e, quindi, per il coroll.5 del teor.3 del § 6 di [5], $e_f = (1:|f|) \cdot f \in \mathcal{M}_Y(\mu)$ da cui consegue che $\mathcal{M}_Y(\mu)$ e, quindi, $\mathcal{L}_Y^1(\mu)$ verifica l'assioma K. D'altra parte, a causa della prop.6 del § 8 di [5], $\mathcal{L}_Y^1(\mu)$ verifica l'assioma S' e, quindi, per il teor. 1.8, $\mathcal{L}_Y^1(\mu)$ verifica l'assioma S.

Dopo ciò, per il teor. 1.1, si ha ovviamente che $\mathcal{M}_Y(\mu) \subset \mathcal{M}(\mathcal{L}_Y^1(\mu))$. Se, poi, è $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_Y^1(\mu))$ e si suppone, dapprima, $|f| \leq 1$, fissato $A \in \mathcal{U}$ risulta $f \cdot \chi_A \in \mathcal{L}_Y^1(\mu)$ e, quindi, esiste una successione $(f_n)_n$ di funzioni semplici rispetto ad \mathcal{U} tale che $f_n \rightarrow f \cdot \chi_A$ q.o.; Consegue che $f_n \rightarrow f \cdot \chi_A$ q.o. in A e, quindi, per il coroll.3 del teor.1 del § 6 di [5], si ha che $f \cdot \chi_A \in \mathcal{M}_Y(\mu)$, cioè $f \in \mathcal{M}_Y(\mu)$. Se, poi, f è arbitraria, a causa del coroll.1 del teor. 1.8 si ha $e_f \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_Y^1(\mu))$ e, quindi, per quanto sopra, $e_f \in \mathcal{M}_Y(\mu)$. D'altra parte per il teor. 1.5 ed a causa di (3.1) si ha $|f| \in \mathcal{M}(\mu)$ e, quindi, $f \in \mathcal{M}(\mu)$ per (1.1) e per il coroll.5 del teor.3 del § 6 di [5]. Si conclude che

$$(3.2) \quad \mathcal{M}_Y(\mu) = \mathcal{M}(\mathcal{L}_Y^1(\mu)) .$$

B I B L I O G R A F I A

- [1] W.M. BOGDANOWICZ, Characterization of linear lattices of functions closed under dominated convergence, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sc. Math. Astron. Phys., Vol. XXIII, n° 5 (1975), 525-530.
- [2] W.M. BOGDANOWICZ, The largest linear lattice of functions in which a D-linear lattice forms a solid subset. Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sc. Math. Astronom. Phys., Vol. XXIII, n° 5 (1975), 531-536.
- [3] W.M. BOGDANOWICZ, Necessary and sufficient conditions for one D-linear lattice to be solid in another, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sc. Math. Astronom. Phys., Vol. XXIII, n° 5 (1975), 537-541.
- [4] W.M. BOGDANOWICZ, Daniell and Daniell-Bochner type integrals, Proceedings of the Conf. on Vect. and Operat.-Valued Measures, Snowbird, Utah, Academic Press (1973), 43-50.
- [5] N. DINCULEANU, Vector Measures, Pergamon Press, 1967.
- [6] P.R. HALMOS, Measure Theory, D. Van Nostrand, New York, 1950.
- [7] J.L. KELLEY and T.P. SRINIVASAN, On the Bochner Integral, Proceedings of the Conf. on Vect. and Operat.-Valued Measures, Snowbird, Utah, Academic Press (1973), 160-174.
- [8] K. MAURIN, Analysis, part. II, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1980.
- [9] J. MIKUSIŃSKI, The Bochner Integral, Birkhäuser Verlag, 1978.
- [10] M.A. PUGLISI, Misurabilità secondo M.H. Stone per funzioni reali, ecc., Le Matematiche, Vol. XXI, Fasc. 1 (1966), 30-65.
- [11] M.A. PUGLISI, Misurabilità e spazi di Riesz-Lebesgue di funzioni reali, Le Matematiche, Vol. XXXI, Fasc. 2 (1976), 342-348.
- [12] M.A. PUGLISI, Misurabilità secondo J. Mikusiński e spazi-KD di funzioni vettoriali, Quaderni dell'Ist. di Anal. Mat. dell'Univ. di Bari, 1982.

- [13] M.H. STONE, Notes on Integration, I-III, Proc. Mat. Acad. Sc. U.S.A., 34 (1948), 35 (1949).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, D. Greco, M. Rigutti.

Nota di Vincenzo Esposito*
 Presentata dal Socio ordinario Carlo Ciliberto
 Adunanza del 9 giugno 1984

Abstract.- A priori estimates for solutions of the equations $\sum_{\ell \leq n} (a_{\ell} D_{t_{\ell}}^4 u + b_{\ell} D_{t_{\ell}}^2 u) + cu = f$ $a_{\ell} \geq 0$ $b_{\ell} < 0$, are obtained.

Riassunto.- Si stabiliscono stime a priori per le soluzioni delle equazioni:

$$\sum_{\ell \leq n} (a_{\ell} D_{t_{\ell}}^4 u + b_{\ell} D_{t_{\ell}}^2 u) + cu = f, \quad a_{\ell} \geq 0 \quad b_{\ell} < 0.$$

In [5] Kohn e Nirenberg hanno stabilito maggiorazioni a priori e teoremi di esistenza e unicità di soluzioni regolari, per il problema del tipo di Dirichlet relativo ad operatori ellittico-co-parabolici del secondo ordine, con coefficienti C^{∞} , in un aperto limitato e regolare Ω , con la condizione:

$$(I) \quad (u, Lu)_{\Omega} \leq \lambda \|u\|_{\Omega}^2 \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad \lambda \text{ essendo una costante sufficientemente grande.}$$

Relativamente all'analogia problematica per operatori ellittico-parabolici d'ordine superiore Canfora [1], Benevento-Bruno-Castellano [2], Cioffi [3], hanno ottenuto teoremi di esistenza ed unicità per operatori verificanti la (I) per qualche λ e che sono degeneri, quasi ellittici, in un numero finito di domini di $\bar{\Omega}$.

In questa nota studio nell'ordine di idee di Kohn e Nirenberg la classe di operatori ellittico-co-parabolici del IV ordine del tipo:

$$L = \sum_{\ell \leq n} (a_{\ell}(t) D_{t_{\ell}}^4 + b_{\ell}(t) D_{t_{\ell}}^2) + c, \quad a_{\ell} \geq 0, \quad -b_{\ell} \geq \lambda > 0 \quad \text{in } \bar{\Omega};$$

non è prescritta alcuna limitazione sul "modo di degenerare", e va d'altra parte osservato che se λ è sufficientemente grande risulta:

$$(II) \quad (u, Lu)_{\Omega} \geq \lambda \|u\|_{\Omega}^2 \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Stabilisco stime di tipo globale per le soluzioni regolari del problema omogeneo del tipo di Dirichlet (cfr. Teorema I); tale problema, in linea con l'impostazione di Fichera [4], prevede le condizioni al bordo di seguito descritte: indicata con ν la normale esterna a $E = \bar{\Omega}$ e posto $a = \sum_{\ell} a_{\ell} \nu_{\ell}^4$, siano E_1 la parte di E su cui $a = 0$ e $\frac{da}{d\nu} = 0$, E_2 la parte di E su cui $a = 0$ e $\frac{da}{d\nu} < 0$, E_3 la parte di E su cui $a > 0$; tali condizioni sono: $u|_{E_1} = 0$, $\frac{du}{d\nu}|_{E_3} \cup E_2 = 0$.

L'idea centrale è di considerare la parte principale di L come una perturbazione singolare dell'operatore ellittico del secondo ordine $\sum_{\ell} b_{\ell} D_{t_{\ell}}^2 + c$; i risultati qui provati evidenziano che, nelle stime a priori, l'effetto di tale perturbazione si manifesta solo nelle adiacenze di $E_1 \cup E_2$.

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università di Napoli.

Le stime qui provate consentono di stabilire teoremi di esistenza ed unicità, cui sarà dedicato un prossimo lavoro.

1. Posizione del problema ed enunciati dei risultati

Consideriamo un'equazione ellittico-parabolica del IV ordine del tipo:

$$(1,1) \quad Lu = \sum_{\ell=1}^n (a_{\ell} D_{t_{\ell}}^4 u + b_{\ell} D_{t_{\ell}}^2 u) + cu = f,$$

in un dominio limitato Ω di \mathbb{R}^n , sufficientemente regolare:

Supponiamo che i coefficienti della (1,1) siano di classe $C^{\infty}(\Omega)$ e per essi si abbia in Ω :

$$(i) \quad a_{\ell} \geq 0, \quad -b_{\ell} \geq \lambda > 0, \quad 2c + \sum_{\ell=1}^n (D_{t_{\ell}}^4 a_{\ell} + D_{t_{\ell}}^2 b_{\ell}) \geq \lambda_0 > 0,$$

con λ e λ_0 costanti.

Indichiamo con Σ la frontiera di Ω , con ν_1 il coseno direttore iesimo della normale esterna ν a Σ ; decomponiamo Σ nelle seguenti parti: Σ_1 la parte Σ dove $a=0$ e $\frac{da}{d\nu} = 0$, Σ_2 la parte di Σ dove $a=0$ e $\frac{da}{d\nu} < 0$, Σ_3 la parte di Σ dove $a > 0$. Supponiamo verificata la condizione:

$$(ii) \quad \Sigma_3 \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \emptyset$$

Consideriamo ora il seguente problema al contorno:

$$(P) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega & f \in W^{N-2}(\Omega) \\ u|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{du}{d\nu}|_{\Sigma_2 \cup \Sigma_3} = 0 & & u \in W^N(\Omega), \quad N \geq 4, \end{cases}$$

dove N è un intero e $W^N(\Omega)$ denota l'ordinario spazio di Sobolev di ordine N .

Denotiamo con $\|\cdot\|_{N'}; \|\cdot\|_N$ la norma in $W^N(\Omega')$, dove $\Omega' \subseteq \Omega$, e indichiamo con C una costante che dipende dai coefficienti della parte principale di L e dalle loro derivate fino al IV ordine. Incominciamo con l'osservare che per u sufficientemente regolare e soluzione del problema (P) si ha:

$$(1,2) \quad (Lu, u) = \sum_{\ell=1}^n (a_{\ell} D_{t_{\ell}}^2 u, D_{t_{\ell}}^2 u) + \sum_{\ell=1}^n ((-b_{\ell} - 2D_{t_{\ell}}^2 a_{\ell}) D_{t_{\ell}} u, D_{t_{\ell}} u) + (2c + \sum_{\ell=1}^n (D_{t_{\ell}}^4 a_{\ell} + D_{t_{\ell}}^2 b_{\ell})) (u, u),$$

da cui per $u \in W_{loc}^4(\Omega) \cap W^2(\bar{\Omega})$, per $\lambda > C$ segue:

$$(1,3) \quad \|u\|_1 \leq k \|f\|, \quad \text{dove } \|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{N-2}$$

D'altra parte, se $u \in W^{N+3}(\Omega)$ ($N \geq 2$) è soluzione del problema (P), con classici procedimenti e utilizzando la (1,3), per $\lambda > C$ si ricava facilmente la disuguaglianza:

$$(1,4) \quad \lambda \|u, A_0\|_N^2 \leq C \|u, A_0\|_N^2 + k_{\lambda} \|f\|_{N-2}^2,$$

dove A_0 e A_0^{\dagger} sono aperti di Ω tali che $A_0 \subset A_0^{\dagger} \subset \bar{A}_0 \subset \Omega^0$ e k_{λ} è una costante dipendente da λ .

Al fine di ottenere stime a priori globali in Ω , indichiamo con $\Sigma_{1,2}$ l'unione delle componenti connesse di $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ognuna delle quali contiene parti non vuote di $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Ciò premesso, in questa nota proveremo il seguente risultato:

TEOREMA I - Sia Ω' un aperto su Ω tale che $\Omega' \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \emptyset$, allora nelle condizioni (i) e (ii) e per $N \geq 4$, esiste un numero positivo $\bar{\lambda}$, dipendente da Ω' tale che, per ogni u appartenente a $W^{N+3}(\Omega)$ soluzione del problema (P) e per $\lambda > \bar{\lambda}$ risulta:

$$(1,5) \quad \|u, \Omega\|_{[N/2]} + \|u, \Omega'\|_N \leq k_\lambda \|f\|_{N-2},$$

k_λ essendo una costante dipendente da λ e $[N/2]$ essendo il minimo intero maggiore di $N/2$.

Se inoltre Σ_2 è vuota la (1,5) vale anche per $N \geq 2$.

2. Notazioni e lemmi

Intorno alla frontiera effettuiamo un cambiamento di variabili: per ogni punto P di Σ scegliamo un intorno I di P aperto su Ω , nel quale si possa introdurre un sistema di coordinate locali (x, y) , dove $-y$ è la distanza del generico punto di I da Σ e in I risulta $J(x, y) = \frac{\partial(t_1 \dots t_n)}{\partial(x_1 \dots x_{n-1}, y)} > 0$ (cfr 5, pag. 821).

Indichiamo con \tilde{I} il trasformato di I nel sistema di coordinate (x, y) , con $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$\| \cdot \|, \| \cdot \|_N$ rispettivamente il prodotto scalare e la norma in $L^2(\tilde{I})$. Con $D^{\alpha, \kappa} u$ denotiamo la derivata d'ordine $|\alpha| + \kappa$ di u cioè: $D^{\alpha, \kappa} u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^{\alpha_{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\kappa$.

Con $\| \cdot \|, \| \cdot \|_N$ indichiamo la norma:

$$\|u, I\|_N^2 = \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} \int_I |D^{\alpha, \kappa} u|^2 dt_1 \dots dt_n = \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} \int_{\tilde{I}} |D^{\alpha, \kappa} u|^2 J(x, y) dx dy.$$

Inoltre denotiamo con L il trasformato di L in coordinate (x, y) :

$$Lu = \sum_{1 \leq |i| + j \leq N} a_{i,j} D^{i,j} u + \sum_{1 \leq |i| + j \leq N} b_{i,j} D^{i,j} u + \dots + cu,$$

dove gli $a_{i,j}$ sono i coefficienti che si ottengono trasformando la parte principale di L in coordinate locali, i $b_{i,j}$ sono i coefficienti che si ottengono trasformando la parte del secondo ordine di L . Si osservi che gli $a_{i,j}$, per $j \neq 0$, si annullano su $\Sigma \cup \Sigma_2$, inoltre risulta: $a_{0,4} = a, b_{0,2} = \sum_k b_k \frac{v_k^2}{x} > \lambda$.

Infine indichiamo con A_h^j il generico operatore differenziale di ordine h , dove l'indice superiore sta ad indicare l'ordine massimo delle derivate rispetto a y , i coefficienti di A_h^j sono coefficienti di \tilde{L}_0 ($\tilde{L}_0 = \sum a_{i,j} D^{i,j}$) o loro derivate fino all'ordine N . Con B_h^j indichiamo il generico operatore differenziale di ordine h i cui coefficienti sono coefficienti di $\tilde{L} - \tilde{L}_0$ o loro derivate fino all'ordine N .

Ciò premesso, detta $\zeta \in C^\infty(\Omega)$ una funzione con supporto contenuto in un intorno I di $P \in \Sigma$, denotata con C_λ una costante che dipende da tutti i coefficienti di L e dalle loro derivate fino all'ordine N (C_λ dipende da λ) e con k una costante positiva, proviamo i seguenti lemmi:

LEMMA (2,1) - Per ogni $u \in W^{N+3}(\Omega)$ ($N \geq 2$) soluzione del problema (P) e per $\lambda > C$ vale la stima:

$$\lambda \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} \|D^{\alpha, \kappa} u\|^2 \leq C \sum_{\substack{|\alpha| + \kappa \leq N \\ \kappa < 2}} \|\zeta_1 D^{\alpha, \kappa} u\|^2 + C_\lambda \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N-1} \|\zeta_1 D^{\alpha, \kappa} u\|^2 + k \|f\|_{N-2}^2$$

dove $\text{supp } \zeta_1 \subseteq \text{supp } \zeta$.

Dim: Posto $\zeta = \zeta J(x, y)$, per $|\beta| \leq N-1$ si ha:

$$(2,1) \quad (L_\zeta D^{\beta,0} u, \zeta D^{\beta,0} u) = \langle L_\zeta D^{\beta,0} u, \zeta D^{\beta,0} u \rangle = \langle D^{\beta,0} L u, \zeta D^{\beta,0} u \rangle + \\ + \langle (L_\zeta D^{\beta,0} - D^{\beta,0} L) u, \zeta D^{\beta,0} u \rangle = (D^{\beta,0} f, \zeta^2 D^{\beta,0} u) + \langle A_{N+2}^4 u, \zeta_1 D^{\beta,0} u \rangle + \langle B_N^2 u, \zeta_1 D^{\beta,0} u \rangle,$$

dove i coefficienti di A_{N+2}^4 sono i coefficienti $a_{i,j}$ e loro derivate tangenziali, tramite integrazioni per parti, tenendo presente le condizioni al contorno nonché l'annullarsi degli $a_{i,j}$ con $j \neq 0$ su $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, si ottiene:

$$(2,2) \quad \langle A_{N+2}^4 u, \zeta D^{\beta,0} u \rangle + \langle B_N^2 u, \zeta D^{\beta,0} u \rangle \leq C \sum_{|\alpha|+k \leq N} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 + C_\lambda \sum_{\alpha+k \leq N-1} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2.$$

Dalle (1,2), (2,1), e (2,2) segue l'asserto.

LEMMA (2,2) - Nelle stesse ipotesi del lemma precedente e se I è un intorno di $P \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ si ha:

$$\lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 1}} \|\zeta D^{\alpha,k} u\|^2 \leq n \sum_{|\alpha|=N-4} \| |a_{\alpha,0}(x;0)|^{1/2} |y| D^{\alpha,4} u \zeta_1 \|^2 + (C_n + C) \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 5}} \|\zeta_1 |y|^{k-1} D^{\alpha,k} u\|^2 + \\ + C_\lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N-1 \\ k \leq 4}} \|\zeta_1 |y|^{k-1} D^{\alpha,k} u\|^2 + k \|f\|_{N-2}^2,$$

con n costante arbitraria positiva e C_n costante dipendente da n .

Dim: Dalla formula di Taylor per $j \neq 0$ si ha:

$$(2,3) \quad a_{i,j}(x,y) = -D_y a_{i,j}(x,0) |y| + O(|y|^2) \quad \forall (x,y) \in I.$$

Posto $\gamma_i = \beta_1 + \dots + \beta_{i-1} - 1 + \dots + \beta_{n-1} = |\beta| - 1$, procedendo come in (2,1) e (2,2), tramite integrazioni per parti e utilizzando la (2,3), per $|\beta| \leq N-1$ si ha:

$$(2,4) \quad (L_\zeta D^{\beta,0} u, \zeta D^{\beta,0} u) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \|\zeta |a_{x_i,y}(x,0)|^{1/2} D^{\gamma_i,2} u\|^2 + \|\zeta D^{\beta,1} u\|^2 + \\ + C \left(\sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \geq 2}} \|\zeta_1 |y|^{k-1/2} D^{\alpha,k} u\|^2 + \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N-1 \\ k \geq 2}} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 \right) + \\ + C_\lambda \left(\sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N-1 \\ k \geq 2}} \|\zeta_1 |y|^{k-1/2} D^{\alpha,k} u\|^2 + \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N-2 \\ k \geq 2}} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 \right) + k \sum_{|\alpha| \leq N-2} \|\zeta_1 D^{\alpha,0} f\|^2.$$

Dalle (1,2) e (2,4), nonché dal lemma (5,2) di (5) si ricava:

$$(2,5) \quad \lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 1}} \|\zeta D^{\alpha,k} u\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \| |a_{x_i,y}(x,0)|^{1/2} \zeta D^{\gamma_i,2} u \|^2 + \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 3}} \| |y|^{k-1/2} D^{\alpha,k} u \|^2 + \\ + C_\lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N-1 \\ k \leq 3}} \|\zeta_1 |y|^{k-1/2} D^{\alpha,k} u\|^2 + k \sum_{|\alpha| \leq N-2} \|\zeta_1 D^{\alpha,0} f\|^2.$$

Ora dalla stima, la cui dimostrazione è riportata nell'appendice:

$$(2,6) \quad \sum_{|\alpha|=N-2} \| |a_{x_i,y}(x,0)|^{1/2} \zeta D^{\alpha,2} u \|^2 \leq \sum_{|\alpha|=N-4} \| |a_{\alpha}(x,0)|^{1/2} |y| \zeta D^{\alpha,4} u \|^2$$

$$+ (C + C_N) \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq N \\ k \leq N}} \| |y|^{k-1/2} \zeta_1 D^{\alpha, k} u \|^2 + C_\lambda \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq N \\ k \leq N}} \| |y|^{k-1/2} \zeta_1 D^{\alpha, k} u \|^2 + \sum_{|\alpha| = N-2} \| \zeta_1 D^{\alpha, 0} f \|^2,$$

e dalla (2,5) segue l'asserto.

3. Stime intorno a Σ_3

Sia $P = (x_0, 0)$ un punto di Σ e siano I e I' due intorni di P del tipo:

$$(3,1) \quad \begin{aligned} I &= \{ (x, y) \in \Omega : 0 \leq |x - x_0| < \delta, |y| \leq d \} & \text{con } d < d' \\ I' &= \{ (x, y) \in \Omega : 0 \leq |x - x_0| < 2\delta, |y| \leq d' \} \end{aligned}$$

Ciò premesso proveremo la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE (3,1) Se λ è sufficientemente grande, per ogni punto P di Σ_3 esistono due intorni I e I' di P del tipo (3,1), tali che per ogni $u \in W^{N+3}(\Omega)$ ($N \geq 2$) soluzione del problema (P) vale la maggiorazione:

$$\lambda \|u, I\|_N^2 \leq \frac{1}{8} \lambda \|u, I'\|_N^2 + C \lambda \| |y|^{1/2} D^{0, N} u, I'\|^2 + k_\lambda \|f\|_{N-2}^2.$$

Dim: In virtù del lemma (2,1) è sufficiente maggiorare solo il prodotto di λ per le norme delle derivate normali di ordine N della u . A tale scopo scegliamo I' in modo che $\lambda > 0$ in I' e indichiamo con ζ una funzione $C^\infty(\Omega)$ la quale abbia supporto in I' e valga 1 in I .

Per $N=2$ osserviamo che si ha:

$$\sum_{i=1}^n (a_{11} D_{t_1}^2 \zeta u, D_{t_1}^2 \zeta u) = (a_{11} D_{t_1}^2 u, \zeta D_{t_1}^2 u) + (A_2^1(\zeta u), \zeta D_{t_1}^2 u) + (A_2^1(\zeta u), A_2^1(\zeta u))$$

e dalla (1,2) con qualche integrazione per parti segue:

$$(3,1)' \quad (a D_{t_1}^2 u, \zeta^2 D_{t_1}^2 u) \leq C \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq 2 \\ k \leq 2}} \| \zeta_1 D^{\alpha, k} u \|^2 + C_\lambda \sum_{|\alpha| + k \leq 1} \| \zeta_1 D^{\alpha, k} u \|^2 + k \| \zeta f \|^2.$$

Per $N > 2$ consideriamo l'uguaglianza:

$$(3,2) \quad (D^{0, N-3} L u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u) = (D^{0, N-3} f, \zeta^2 |y| D^{0, N} u)$$

e osserviamo che risulta:

$$\begin{aligned} (D^{0, N-3} L u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u) &= \langle D^{0, N-3} L u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u \rangle = \langle D^{0, N-3} L u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u \rangle + \\ &+ \langle (A_N^N + B_{N-1}^{N-1}) u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u \rangle = \langle a D^{0, N+1} u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u \rangle + \langle (A_{N+1}^N + B_{N-1}^{N-1}) u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u \rangle = \\ &= 1/2 (a D_{t_1}^2 u, \zeta^2 D_{t_1}^2 u) - 1/2 \langle (a \zeta^2)_{t_1} D_{t_1}^0 u, |y| D^{0, N} u \rangle + \langle (A_{N+1}^N + B_{N-1}^{N-1}) u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u \rangle, \end{aligned}$$

dove $\zeta^2 = \zeta^2(x, y)$; ora tramite opportune integrazioni per parti si ricava:

$$\begin{aligned} (D^{0, N-3} L u, \zeta^2 |y| D^{0, N} u) &\geq 1/2 (a \zeta^2 D_{t_1}^2 u, D_{t_1}^2 u) - C \zeta_1 |y| D^{0, N} u, D^{0, N} u + \\ &- C \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq N \\ k \leq N}} \| \zeta_1 D^{\alpha, k} u \|^2 - C_\lambda \sum_{|\alpha| + k \leq N-1} \| \zeta_1 D^{\alpha, k} u \|^2, \end{aligned}$$

da tale disuguaglianza e dalla (3,2), per $N > 2$ si ha:

$$(3,3) \quad (a \zeta^2 D_{t_1}^2 u, D_{t_1}^2 u) \leq C \zeta_1^2 |y| D^{0, N} u, D^{0, N} u + C \sum_{|\alpha| + k \leq N} \| \zeta_1 D^{\alpha, k} u \|^2 +$$

$$+ C_\lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 + k \|\zeta_1 D^{0,N-3} f\|^2.$$

Dalle (3,1)' e (3,3), ricordando che a in I' è maggiore di zero, per $N \geq 2$ segue:

$$(3,4) \quad \|\zeta D^{0,N} u\|^2 \leq C \left(\sum_{|\alpha|+k \leq N} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 + \|\zeta_1 |y|^{1/2} D^{0,N} u\|^2 \right) +$$

$$+ C_\lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 + k \|\zeta_1 D^{0,N-2} f\|^2.$$

Ora dalla ben nota formula (cfr. (5) pag.859) :

$$(3,5) \quad \sum_{|\alpha|+k \leq N} \|\zeta D^{\alpha,k} u\|^2 \leq n \|\zeta_1 D^{0,N} u\|^2 + C_n \sum_{|\alpha| \leq N} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2,$$

dalla (3,4), nonchè dal lemma (1,1) consegue facilmente:

$$(3,6) \quad \lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N} \|\zeta D^{\alpha,k} u\|^2 \leq C(n\lambda + C_n) \sum_{|\alpha|+k \leq N} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 + C_\lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} u\|^2 +$$

$$+ k \sum_{|\alpha|+k \leq N-2} \|\zeta_1 D^{\alpha,k} f\|^2 + c \|\zeta_1 |y|^{1/2} D^{0,N} u\|^2,$$

da cui, per $n < \frac{1}{8C}$, λ sufficientemente grande, segue l'asserto.

4. Stime intorno a $E_1 \cup E_2$

Sia P un punto di $E_1 \cup E_2$, I un intorno di P del tipo descritto nel paragrafo 2., indichi con $\|\cdot\|_N, I\|\cdot\|_N$ la norma:

$$\|\cdot\|_N, I\|\cdot\|_N^2 = \sum_{|\alpha|+k \leq N} \int_I (D^{\alpha,k} u)^2 dt_1 \dots dt_n + \sum_{|\alpha|+k \leq N} \int_I |y|^{k-1} (D^{\alpha,k} u)^2 dt_1 \dots dt_n;$$

proveremo la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE (4,1) Se λ è sufficientemente grande, per ogni punto P di $E_1 \cup E_2$ esistono due intorni I e I' di P del tipo (3,1), tali che per ogni $u \in W^{N+3}(\Omega)$ soluzione del problema (P) vale la maggiorazione:

$$(4,1) \quad \lambda \|\cdot\|_N, I\|\cdot\|_N^2 \leq C \|\cdot\|_N, I'\|\cdot\|_N^2 + k_\lambda \|\cdot\|_{N-2}^2,$$

con $N \geq 2$ se P è interno a E_1 , con $N \geq 4$ se $P \in E_2$.

Se inoltre P è interno a E_2 , con $N \geq 4$ vale la maggiorazione:

$$(4,2) \quad \lambda \|\cdot\|_N, I\|\cdot\|_N^2 \leq \frac{1}{8} \lambda \|\cdot\|_N, I'\|\cdot\|_N^2 + C_\lambda \|\cdot\|_{N-2}^2 + k_\lambda \|\cdot\|_{N-2}^2.$$

Per provare la detta proposizione premettiamo alcuni lemmi:

LEMMA (4,1) Per ogni $u \in W^{N+2}(\Omega)$ ($N \geq 2$) soluzione del problema (P), per $|\varepsilon|+h \leq N$, vale la disuguaglianza:

$$- (D^{\beta,h-2} L_\varepsilon u, \zeta^2 |y|^{h-1} D^{\beta,h} u) \geq \frac{1}{4} ((h-1)(5-h) + \frac{1}{4}) (a_Y(x,0) |y|^{h-2} \zeta^2 D^{\beta,h} u, D^{\beta,h} u) +$$

$$- C \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} |\zeta_1| |y|^{(\kappa-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2 - C_\lambda \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N-1} |\zeta_1| |y|^{(\kappa-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2,$$

dove ζ ha il supporto in un intorno I' di un punto $P \in \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ e il $\text{supp}_1 \subseteq \text{supp}$.

Dim: Posto $\zeta^{-2} = \zeta^2 \tilde{J}(x, y)$ e $|y_i| = \beta_1 + \dots + (\beta_i - 1) + \dots + \beta_{n-1} = |\beta| - 1$, si ha:

$$(4,4) \quad - (D^{\beta, h-2} L_{\partial u}, \zeta^2 |y|^{h-1} D^{\beta, h} u) = - \langle D^{\beta, h-2} L_{\partial u}, \zeta^{-2} |y|^{h-1} D^{\beta, h} u \rangle = - \langle L_{\partial u} D^{\beta, h-2} u, \zeta^2 |y|^{h-1} D^{\beta, h} u \rangle \\ - (h-2) \langle a_y(x, 0) |y|^{h-1} \zeta^2 D^{\beta, h+1} u, D^{\beta, h} u \rangle + \sum_{i \leq n-1} |y_i| \langle a_{x_i, y}(x, \zeta) |y|^{h-2} D^{Y_i, h+2} u, D^{\beta, h} u \rangle + \\ + \langle A_{N+1}^{h+2} u |y|^{h-1}, D^{\beta, h} u \zeta^2 \rangle.$$

Osservando che i coefficienti di $D^{i, j} u$ di $A_{N+1}^{h+2} u$, con $h-2 < j < h+2$, si annullano su $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ e quelli di $D^{i, h+2} u$ hanno su $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ uno zero del secondo ordine, integrando per parti risulta:

$$(4,5) \quad \langle A_{N+1}^{h+2} u |y|^{h-1}, D^{\beta, h} u \zeta^2 \rangle \geq - C \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} |\zeta_1| |y|^{(\kappa-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2 + C_\lambda \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N-1} |\zeta_1| |y|^{(\kappa-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2.$$

Inoltre, utilizzando il lemma (5,1) di (5), con facili calcoli risulta:

$$(4,6) \quad \sum_{i \leq n-1} |y_i| \langle a_{x_i, y}(x, 0) |y|^{h-2} D^{Y_i, h+2} u, D^{\beta, h} u \rangle \geq n (a_y(x, 0) |y|^{h-2} \zeta^2 D^{\beta, h} u, D^{\beta, h} u) + \\ - (C + C_n) \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} |\zeta_1| |y|^{(\kappa-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2,$$

con n costante arbitraria e C_n costante dipendente da n .

Ora denotiamo con $S_\ell(u)$ la parte principale di $D_{t_\ell}^2 u$ trasformato in coordinate locali

(x, y) cioè:

$$S_\ell(u) = \sqrt{\nu}^2 D_y^2 u + \sum_{j=1}^{n-1} \nu_\ell \mu_j D_{x_j, y}^2 u + \sum_{i, j=1}^{n-1} \mu_i \mu_j D_{x_i, x_j}^2 u, \quad \text{dove } \mu_i = D_{t_\ell} x_i.$$

Tramite integrazioni per parti, ricordando che i coefficienti $a_{i, j}$ con $j \neq 0$ hanno su $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ uno zero almeno del primo ordine, con qualche calcolo si ha:

$$(4,7) \quad - \langle L_{\partial u} D^{\beta, h-2} u, \zeta^{-2} |y|^{h-1} D^{\beta, h} u \rangle \geq \sum_{\ell=1}^n (a_\ell \zeta^2 |y|^{h-1} S_\ell(D^{\beta, h-1} u), S_\ell(D^{\beta, h-1} u)) + \\ + \frac{1}{2} h(h-1) (a_y(x, 0) \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta, h} u, D^{\beta, h} u) - C \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} |\zeta_1| |y|^{(\kappa-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2.$$

Dalle (4,4), (4,5), (4,6), (4,7), nonchè dalla disuguaglianza, la cui dimostrazione è riportata nella appendice:

$$(4,8) \quad \sum_{\ell=1}^n (a_\ell \zeta^2 |y|^{h-1} S_\ell(D^{\beta, h-1} u), S_\ell(D^{\beta, h-1} u)) \geq \frac{1}{4} (h-1)^2 (a_y(x, 0) \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta, h} u, D^{\beta, h} u) + \\ - C \sum_{|\alpha| + \kappa \leq N} |\zeta_1| |y|^{(\kappa-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2,$$

per $n < 1/16$ segue l'asserto.

LEMMA (4,2) Nelle stesse ipotesi del lemma precedente vale la disuguaglianza:

$$- (D^{\beta, h-2} L_{\partial u}, \zeta^2 |y|^{h-1} D^{\beta, h} u) \geq \lambda |\zeta| |y|^{(h-1)/2} |D^{\beta, h} u|^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} ((h-1)(5-h) + 1) \left(\frac{a_Y(x,0)}{Y} \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta,h} u, D^{\beta,h} u \right) - C \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 +$$

$$- C_\lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-1} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 .$$

Dim: La dimostrazione si consegue facilmente, infatti con qualche integrazione per parti si ha :

$$- (D^{\beta,h-2} L - D^{\beta,h-2} L_0) u, \zeta^2 |y|^{h-1} D^{\beta,h} u = \sum_{\ell=1}^n (b_\ell \zeta^2 |y|^{h-1} D_{\xi_\ell}^{\beta,h-1} (D^{\beta,h-1} u), D_{\xi_\ell}^{\beta,h-1} (D^{\beta,h-1} u)) +$$

$$+ (B_{N-1}^{N-1} u, \zeta^2 |y|^{N-2} B_{N-1}^{N-1} u) \geq \lambda \|\zeta\| |y|^{(h-1)/2} D^{\beta,h} u \|^2 - C_\lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-1} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 ,$$

e dal lemma (4,1) segue l'asserto .

Dimostrazione della proposizione (4,1) .

Se P è interno a Σ_1 , la disuguaglianza (4,1) si ottiene facilmente dai lemmi (2,2) e (4,2) nonchè dall'uguaglianza :

$$(4,9) \quad (D^{\beta,h-2} L u, \zeta^2 |y|^{h-1} D^{\beta,h} u) = (D^{\beta,h-2} F, \zeta^2 |y|^{h-1} D^{\beta,h} u) ,$$

infatti , osservando che $a_Y(x,0) = 0$ su Σ_1 , dai detti lemmi ed alla (4,9) segue :

$$\lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 \leq C \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 +$$

$$+ C_\lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-1} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 + k \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-2} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} f \|^2 ,$$

da cui per $\text{supp } \zeta \subset I'$ e $\zeta=1$ in I, segue la (4,1) .

Se $P \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, procediamo come segue : dall'uguaglianza (4,9), dai lemmi (4,2) e (2,2), dalla (6,1) (cfr. appendice), nonchè dalla seguente disuguaglianza (che si ottiene con semplici integrazioni per parti) :

$$\sum_{|\alpha|+\kappa=3} | (a_Y(x,0) \zeta^2 |y| D^{\alpha,3} u, D^{\alpha,3} u) | \leq \eta \sum_{|\alpha|+\kappa=4} (a_Y(x,0) \zeta^2 |y|^2 D^{\alpha,4} u, D^{\alpha,4} u) +$$

$$+ C_\eta \sum_{|\alpha|+\kappa=2} | (a_Y(x,0) \zeta_1 D^{\alpha,2} u, D^{\alpha,2} u) | + C \sum_{|\alpha|+\kappa=3} \|\zeta_1\| |y| D^{\alpha,3} u \|^2 ,$$

per $\eta < 1/16$ si ottiene facilmente :

$$(4,10) \quad \lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 + \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa=4 \\ \kappa \geq 4}} (1/4(\kappa-1)(5-\kappa) + 1/8) (a_Y(x,0) \zeta^2 |y|^{\kappa-2} D^{\alpha,\kappa} u, D^{\alpha,\kappa} u) \|^2$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 + C_\lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-1} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 + k \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-2} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} f \|^2 .$$

Dalla (4,10) , utilizzando per $k=4$ e $k=5$ la stima, la cui dimostrazione è riportata nell'appendice:

$$(4,11) \quad \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N \\ \kappa \geq 3}} - (a_Y(x,0) \zeta^2 |y|^{\kappa-2} D^{\alpha,\kappa} u, D^{\alpha,\kappa} u) \leq \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N \\ \kappa \geq 3}} \frac{4}{(\kappa-2)^2} \|\zeta\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 +$$

$$+ C \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 + C_\lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-1} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 + k \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N-2} \|\zeta_1\| |y|^{(\kappa-1)/2} f \|^2$$

conseguo la (4,1) .

Dimostriamo ora la (4,2) . Operando come nella dimostrazione dei lemmi (4,1) e (4,2) si ot-
tiene :

$$-(D^{0,N-2}_{Lu}, \zeta^2 |y| D^{0,N}_u) \geq -1/4 (2N-7) (a_y(x,0) \zeta^2 D^{0,N}_{u,d} D^{0,N}_u) - C ||\zeta_1 |y| D^{0,N}_u||^2 +$$

$$- C \sum_{|\alpha|+k \leq N} ||\zeta_1 D^{\alpha,k} u||^2 - C_\lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} ||\zeta_1 D^{\alpha,k} u||^2 ,$$

che insieme all'uguaglianza :

$$-(D^{0,N-2}_{Lu}, \zeta^2 |y| D^{0,N}_u) = - (D^{0,N-2}_f, \zeta^2 |y| D^{0,N}_u) ,$$

fornisce :

$$(4,12) - (a_y(x,0) \zeta^2 D^{0,N}_u, D^{0,N}_u) \leq C ||\zeta_1 |y| D^{0,N}_u, D^{0,N}_u||^2 + C \sum_{|\alpha|+k \leq N} ||\zeta_1 D^{\alpha,k} u||^2 +$$

$$+ C_\lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} ||\zeta_1 D^{\alpha,k} u||^2 + k ||\zeta_1 D^{0,N-2}_f||^2 .$$

Ora scelto I' in modo che $-a_y(x,0) > 0$ in I' , sia $\text{supp} \zeta \subseteq I'$ e $\zeta = 1$ in I ; dal lem-
ma (2,1) e dalle (3,5) e (4,12) per $n < \frac{1}{8C}$ è λ sufficientemente grande segue l'asserto .

4. Dimostrazione del Teorema I

Il Teorema I discende facilmente dalle proposizioni (3,1) e (4,1) e dalla stima (1,4) .

Infatti, le dette proposizioni implicano rispettivamente che esistono due intorni completi

$A_{2,3}$ e $A'_{2,3}$ di $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ e $A_{1,2}$ e $A'_{1,2}$ di $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, tali che risulti :

$$(5,1) \lambda ||u, A_{2,3}||^2_N \leq \frac{1}{4} \lambda ||u, A'_{2,3}||^2_N + C \lambda || |y|^{1/2} D^{0,N}_u, A'_{1,2} ||^2 + k_\lambda ||f||^2_{N-2} ,$$

$$(5,2) \lambda ||u, A'_{1,2}||^2_N \leq C ||u, A'_{1,2}||^2_N + k_\lambda ||f||^2_{N-2} ,$$

qualunque sia $u \in W^{n+3}(\Omega)$, con $N \geq 4$, soluzione del problema (P) .

E' lecito supporre lo spessore di $A_{2,3}$ minore di $1/4C$ e quindi la (5,1) si può scrivere
nella forma :

$$\frac{1}{2} \lambda ||u, A_{2,3}||^2_N \leq \frac{1}{2} \lambda ||u, A'_{2,3} - A_{2,3}||^2_N + k_\lambda ||f||^2_{N-2} ,$$

da cui utilizzando la (1,4) si ha :

$$(5,3) \lambda ||u, A_{2,3}||^2_N \leq C ||u, A'_0||^2_N + k_\lambda ||f||^2_{N-2} ,$$

dove $\bar{A}'_0 \subset \Omega$.

Ora dalle (5,3), (5,2) e dalla stima (1,4) con $A_0 = \Omega - (A_{1,2} \cup A_{2,3})$, per λ sufficiente-
mente grande segue:

$$\frac{1}{2} \lambda (||u, A_{2,3}||^2_N + ||u, A_0||^2_N + ||u, A_{1,2}||^2_N) \leq C ||u, A'_0||^2_N +$$

$$+ k_\lambda ||f||^2_{N-2} \leq C/d^N ||u, A_{1,2}||^2_N + k_\lambda ||f||^2_{N-2} ,$$

dove d è la distanza di $\Sigma_1 \cup \Sigma_{1,2}$ da \bar{A}'_0 .

Dalla (5,4) per $n' = A_{2,3} \cup A_0$ e $\lambda > c/d^N = \bar{\lambda}$, si ha :

$$\|u, n'\|_N^2 + \|u, A_{1,2}\|_N^2 \leq k_\lambda \|f\|_{N-2}^2,$$

e dal lemma (5,2) di (5) segue l'asserto .

E' poi ovvio, confronta proposizioni (3,1), e (4,1), che se ε_2 è vuoto l'asserto vale anche per $N \geq 2$.

Appendice

Dimostrazione della disuguaglianza (2,6)

Dal lemma (5,1) di (5) è sufficiente provare la maggiorazione :

$$(6,1) \sum_{\alpha=N-2} \| |a_Y(x,0)|^{1/2} \zeta D^{\alpha,2} u \|^2 \leq n \sum_{|\alpha|=N-4} \| |a_Y(x,0)|^{1/2} \zeta |y| D^{\alpha,4} u \|^2 +$$

$$+ (C_n + C) \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N \\ \kappa \leq 3}} \| \zeta_1 |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 + C_\lambda \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N-1 \\ \kappa \leq 1}} \| \zeta_1 |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2 +$$

$$+ k_\lambda \sum_{|\alpha|=N-2} \| \zeta_1 D^{\alpha,0} f \|^2.$$

A tal fine consideriamo l'uguaglianza :

$$(6,2) - (D^{\beta,0}_{Lu}, \zeta^2 D^{\beta,1} u) = - (D^{\beta,0}_f, \zeta^2 D^{\beta,1} u) \quad \text{con } |\beta|=N-2.$$

Posto $\gamma_1 = \beta_1 + \dots + \beta_{N-1} = |\beta| - 1$ e $\zeta^2 = \zeta^2 J(x,y)$, osserviamo che si ha :

$$(6,3) - (D^{\beta,0}_{Lu}, \zeta^2 D^{\beta,1} u) = - (D^{\beta,0}_{Lu}, \zeta^2 D^{\beta,1} u) = \langle a_Y(x,0) \zeta^2 |y| D^{\beta,4} u, D^{\beta,1} u \rangle +$$

$$- 1/2 \langle a_{YY}(x,\bar{y}) |y|^2 D^{\beta,4} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle - \sum_i \gamma_i \langle a_{x_i} D^{\gamma_i,4} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle + \langle A_N^4 u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle +$$

$$+ \langle A_{N+2}^3 u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle - \langle b D^{\beta,2} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle + \langle B_N^1 u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle,$$

dove $\bar{y} \in]y, 0[$. Tramite integrazioni per parti si ricava :

$$(6,4) \langle a_Y(x,0) |y| D^{\beta,4} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle \geq -3/2 \langle a_Y(x,0) \zeta^2 D^{\beta,2} u, D^{\beta,2} u \rangle - C \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N \\ \kappa \geq 2}} \| \zeta_1 |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2;$$

$$(6,5) -1/2 \langle a_{YY}(x,\bar{y}) |y|^2 D^{\beta,4} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle \geq - C \int_{FI} \zeta^2 |D^{\beta,1} u|^2 dx - C \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N \\ \kappa \geq 2}} \| \zeta_1 |y|^{(\kappa-1)/2} D^{\alpha,\kappa} u \|^2;$$

$$(6,6) - \langle b D^{\beta,2} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle \geq \lambda \int_{FI} \zeta^2 |D^{\beta,1} u|^2 dx - C_\lambda \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N-1 \\ \kappa \geq 1}} \| \zeta D^{\alpha,\kappa} u \|^2;$$

$$(6,7) - \langle a_{x_1} D^{\gamma_1,4} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle = \langle a_{x_1,Y} D^{\gamma_1,3} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle + \langle a_{x_1} D^{\gamma_1,3} u, \zeta^2 D^{\beta,2} u \rangle +$$

$$+ \langle a_{x_1} D^{\gamma_1,3} u, D^{\beta,1} u \rangle (\zeta^2)_Y \geq \langle a_{x_1,Y}(x,0) D^{\gamma_1,3} u, \zeta^2 D^{\beta,1} u \rangle - n' \langle a_{x_1,Y}(x,0) \zeta^2 D^{\beta,2} u, D^{\beta,2} u \rangle -$$

$$- (C+C_n) \sum_{\substack{|\alpha|+\kappa \leq N \\ \kappa \geq 2}} \| |y|^{(\kappa-1)/2} \zeta_1 D^{\alpha,\kappa} u \|^2;$$

d'altra parte integrando per parti e utilizzando il lemma (5,2) di (5), posto $|y_1^1| = |y_1|_{-1} = |y_1| - 2$, si ha:

$$\langle a_{x_1, y} (x, 0) D^{y_1, 3} u, \zeta^{-2} D^{\beta, 1} u \rangle \geq -n (|a_{x_1, y} (x, 0)| \zeta^2 D^{y_1, 3} u, D^{y_1, 3} u) + \\ - (C + C_n) \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq N \\ k \leq 3}} |\zeta_1| |y|^{(k-1)/2} \|D^{\alpha, k} u\|^2,$$

da tale disuguaglianza, dai lemmi (5,1), (5,2) di (5), nonchè dalla (6,7) si ricava:

$$(6,8) \quad - \sum_1 y_1 \langle a_{x_1} D^{y_1, 4} u, \zeta^{-2} D^{\beta, 1} u \rangle \geq -n \sum_{|\alpha| = N-4} \| |a_y (x, 0)|^{1/2} |y| D^{\alpha, 4} u \|^2 + \\ - n' \| |a_y (x, 0)|^{1/2} \zeta^{-2} D^{\beta, 2} u \|^2 - (C + C_n + C_{n'}) \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq N \\ k \leq 3}} |\zeta_1| |y|^{(k-1)/2} \|D^{\alpha, k} u\|^2;$$

infine osservando che i coefficienti di A_N^4 e A_{N+2}^3 sono dati dai coefficienti $a_{1,j}$ e loro derivate tangenziali e, che questi per $j \neq 0$ si annullano su $E_1 \cup E_2$, con integrazioni per parti si ricava:

$$(6,9) \quad \langle A_N^4 u, \zeta^{-2} D^{\beta, 1} u \rangle + \langle A_{N+2}^3 u, \zeta^{-2} D^{\beta, 1} u \rangle + \langle B_N^1 u, \zeta^{-2} D^{\beta, 1} u \rangle \geq \\ \geq -C \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq N \\ k \leq 4}} |\zeta_1| |y|^{(k-1)/2} \|D^{\alpha, k} u\|^2 - C_\lambda \sum_{\substack{|\alpha| + k \leq N-1 \\ k \leq 3}} |\zeta_1| |y|^{(k-1)/2} \|D^{\alpha, k} u\|^2.$$

Dalle (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (6,8), (6,9), per $n'=1/2$ segue la (6,1).

Dimostrazione della disuguaglianza (4,8)

Consideriamo, per $|\beta| + h = N$, $h \geq 3$, la disuguaglianza:

$$\sum_{\ell=1}^n (a_\ell \zeta^2, (S_\ell (D^{\beta, h-1} u) |y|^{(h-1)/2} - 1/2(h-1) v_\ell |y|^{(h-3)/2} D^{\beta, h} u)^2) \geq 0$$

da cui segue:

$$(6,10) \quad \sum_{\ell=1}^n (a_\ell \zeta^2 |y|^{h-1} S_\ell (D^{\beta, h-1} u), S_\ell (D^{\beta, h-1} u)) \geq -1/4 (h-1)^2 (a_\ell \zeta^2 |y|^{h-3} D^{\beta, h} u, D^{\beta, h} u) + \\ + (h-1) \sum_{\ell=1}^n (a_\ell v_\ell^2 S_\ell (D^{\beta, h-1} u), \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta, h} u) = 1/4 (h-1) (a_y (x, 0) \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta, h} u, D^{\beta, h} u) \\ - (h-1) (a_y (x, 0) |y|^{h-1} \zeta^2 D^{\beta, h+1} u, D^{\beta, h} u) + (A_{N+1}^h u, \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta, h} u).$$

Ora poichè i coefficienti di A_{N+1}^4 si annullano su $E_1 \cup E_2$, integrando per parti, dalla (6,10) si ottiene la (4,8).

Dimostrazione della disuguaglianza (4,11)

Posto $\zeta^{-2} = \zeta^2 J(x, y)$, osserviamo che risulta:

$$(D^{\beta, h-3} Lu, \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta, h} u) = \langle D^{\beta, h-3} Lu, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u \rangle = \langle a D^{\beta, h+1} u, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u \rangle + \\ \langle A_{N+1}^h u, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u \rangle + \langle A_{N-1}^{h+1} u, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u \rangle +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \langle a_{x_i} \zeta^{-2} |y|^{h-1} D^{\gamma_i, h+1} u, D^{\beta, h} u \rangle + \langle b D^{\beta, h-1} u, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u \rangle + \\
 & + \langle B_{N-1}^{h-2} u, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u \rangle ,
 \end{aligned}$$

da cui tenendo conto che i coefficienti $a_{i,j}$ per $j \neq 0$ si annullano su $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, integrando per parti e utilizzando la (2,3) e i lemmi (5,2) e (5,1) di (5), si ottiene:

$$(6,11) \quad (D^{\beta, h-3} Lu, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u) \geq -1/2 (h-2) (a_\gamma(x,0) \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u, D^{\beta, h} u) +$$

$$\frac{-2}{h-2} \lambda (\zeta^{-2} |y|^{h-1} D^{\beta, h} u, D^{\beta, h} u) - C \sum_{|\alpha|+\kappa=N} |\zeta_1| |y|^{(k-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2 - C_\lambda \sum_{|\alpha|+\kappa \leq N} |\zeta_1| |y|^{(k-1)/2} |D^{\alpha, \kappa} u|^2,$$

dalla (6,11) e dall'uguaglianza:

$$- (D^{\beta, h-3} Lu, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u) = - (D^{\beta, h-3} \varepsilon, \zeta^{-2} |y|^{h-2} D^{\beta, h} u)$$

segue la (4,11).

Bibliografia

- (1) A. CANFORA "Esistenza e unicità delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad una equazione ellittico-parabolica di ordine $2m$ " ,Ricerche di Matematica, volXXV,1976,pp246-304.
- (2) M. L. BENEVENTO, T. BRUNO, L. CASTELLANO "Esistenza ed unicità di una soluzione generalizzata del problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni" .Ricerche di Matematica, volXXV,1976,pp81-100.
- (3) A. CIOFFI " Problemi ad indice zero per un'equazione ellittico- degenera " . In corso di stampa su Ricerche di Matematica .
- (4) G. FICHERA " Sulle equazioni differenziali lineari ellittico paraboliche del secondo ordine" . Atti Acc.Naz.LinceiMem.Ser.8, vol 5, 1956, pp 1-30 .
- (5) J. J. KOHN and L. NIRENBERG " Degenerate elliptic-parabolic equations of second order" . Comm.Pure Appl. Math.,1967, pp 797-870 .

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Cimmino, C. Ciliberto, D. Greco.

PROPERTIES OF PORTLAND SLAG CEMENTS (*)

Nota di Giuseppe Frigione (**)

Presentata dal Socio Prof. Riccardo Sersale

Adunanza del 9 giugno 1984

Abstract

The behaviour of blast furnace slag cements differs from that of plain Portland cements in proportion to the increase of slag content owing to two factors: the hydration rate and the pore structure of the cement paste. This paper presents a explanation for differences in the engineering properties between slag cement and Portland cement concretes and shows as these differences are affected essentially from different rates of hydration and pore structures.

Riassunto

Il comportamento dei cementi d'altoforno differisce tanto più da quello dei cementi Portland quanto maggiore è il contenuto di loppa nel cemento. Questo articolo presenta una interpretazione delle differenze nelle proprietà ingegneristiche tra calcestruzzi confezionati con cementi d'altoforno e quelli confezionati con cemento Portland e mostra come queste differenze sono influenzate essenzialmente dalla diversa velocità di idratazione dei due cementi nonché dalla diversa struttura dei pori della pasta cementizia formata.

Introduction

The properties of the slag cement are determined by factors dependent on the quality of the blast furnace slag and by factors dependent on the manufacturing characteristics of the cement. Among the former, important factors are the temperature of the liquid slag just before granulation, the rapidity of cooling and the chemical composition of the slag: the more basic materials may be expected to have more hydraulic reactivity. However, the amounts of minor components often have a significant effect. In general, these factors are outside the slag consumers' control. Among the second factors are the amount of slag used in the blend, which will, of course, determine the extent to which the cement characteristics are modified and the fineness of grind, both as regards specific surface area and as regards grain size distribution.

(*) Report presented at the Workshop: "Slag Cements: Research and Practice" organized by The Pennsylvania State University, University Park, U.S.A., on March 12-14, 1984.

(**) Dipartimento di Chimica dell'Università della Calabria - Arcavacata di Rende, Cosenza.

Hydration

When water is added to granulated blast furnace slag cement, the Portland cement fraction starts to hydrate first, liberating calcium hydroxide. This calcium hydroxide accelerates the hydration of the slag grains increasing the CaO/SiO_2 ratio of the calcium silicate hydrate phase film formed on the hydrated slag grains. With long age the slag can combine with about 10%, of its weight, of $\text{Ca}(\text{OH})_2$ (1). This means that, since Portland clinker liberates about 25% of $\text{Ca}(\text{OH})_2$ (2), stoichiometrically speaking, in mixtures having a clinker-slag ratio of 25:75, the lime liberated from the Portland cement fraction is still sufficient to accelerate the whole of the slag.

The hydration reaction of the slag is slow and, for the most part, the gypsum is consumed by the Portland cement fraction before the slag begins to react (3), with the formation of ettringite type phase (AFT phase) (4). The calcium silicate hydrate phase, produced mainly from the hydration of the calcium silicates of the clinker, all the clinker and slag grains covers together. Later the slag grains are covered by a compact C-S-H. Energy dispersive X-ray analysis (EDX) indicated that C-S-H from the hydration of the slag is richer in MgO and Al_2O_3 than that of the Portland cement fraction. Under electron microscope, it is seen that the calcium silicate hydrate phase produced by the slag hydration is not so well crystallized but is denser, while the ettringite is present in the form of needles which are shorter and thinner as the percentage of slag increases. In the course of time the ettringite is converted to various complex tricalcium monoaluminate sulphate phases and C_4AH_{13} (AFm phases) (5).

More recent investigations have shown the contribution of alkalis to the slag hydration. Alkalis may be incorporated in or accommodated by the identified C-S-H phases (6). However the principal hydrates formed are essentially the same as those in Portland cement paste, but slag generally induces a more dense structure in the hardened paste.

The behaviour of slag cements differs from that of plain Portland cements in proportion to the increase of slag content owing to two fundamental factors:

- the hydration rate,
- the pore structure of the cement paste.

Hydration rate

It is thought that the ettringite crystals and the quite compact C-S-H phase surrounding the slag grains contribute to slowing down the hydration reaction by preventing the water from reaching inside the grain to be hydrated (7). Fig. 1 shows typical behaviour for the slag fraction that has not yet reacted, in function of the time. After a year still about 50% of the slag remains unhydrated.

Pore structure

The pore structure of the cement paste governs a series of mortar and concrete properties such as compressive strength, permeability, chemical resistance, as well as the hydration rate. In fact, in very small pores the hydration of cement stops, because the nuclei of the hydration products do not have enough room to grow into crystals (8).

At earlier ages, the total porosity of slag cement pastes, for the same water-

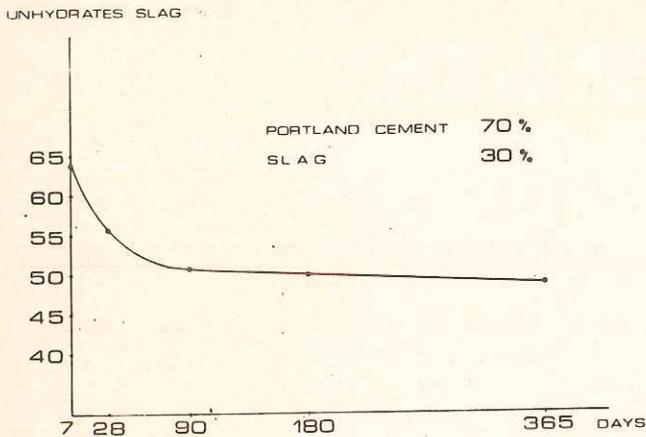


Fig. 1:

Typical decrease of unhydrated slag as a function of age, according (9).

Portland Blast Furnace cement with 65 % slag.

cement ratio, increases with the increase in slag, since the degree of progress of hydration of the slag fraction is less than that of the clinker fraction. But at medium hydration time, does the total porosity of the mixtures richer in slag tend to equal and then, in case, be lower in respect to that presented by Portland cement (10). Fig. 2 shows that, at age of 28 days,

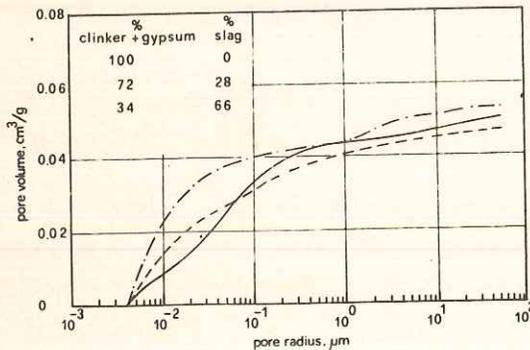


Fig. 2:

Pore size distribution curves of Portland cement and slag cement mortar. Age of hydration: 28 days, Temperature: 20 °C (11).

porosity of the Portland cement and slag cement pastes is approximately the same, for pores with radius larger than $3.7 \times 10^{-3} \mu\text{m}$ and smaller than $50 \mu\text{m}$, but that the distribution of the various pore size is very different. This can be seen more clearly in the histograms of Fig. 3. It also apparent that the pores become smaller as slag content increases (11) (12).

The object of this paper is to present a explanation for differences in the engineering properties between slag cement and Portland cement concretes and to show as these differences are affected essentially from different rates of hydration and pore structures (13).

Rheological Behaviour

The rheological characteristics of slag cement, compared to Portland cement, are affected both by the fact that, in the first hours of hydration, the Portland cement frac-

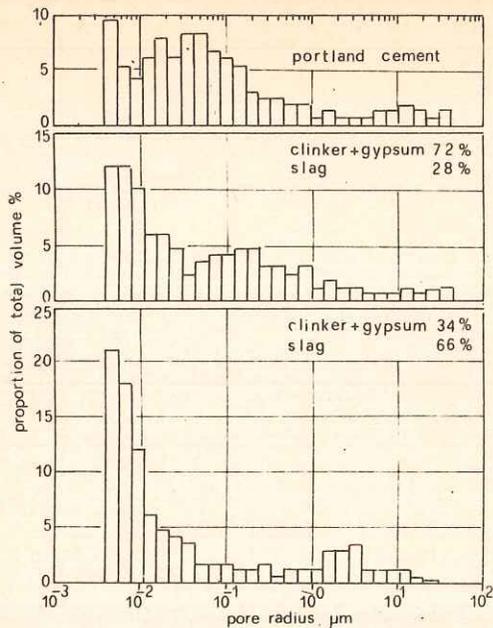


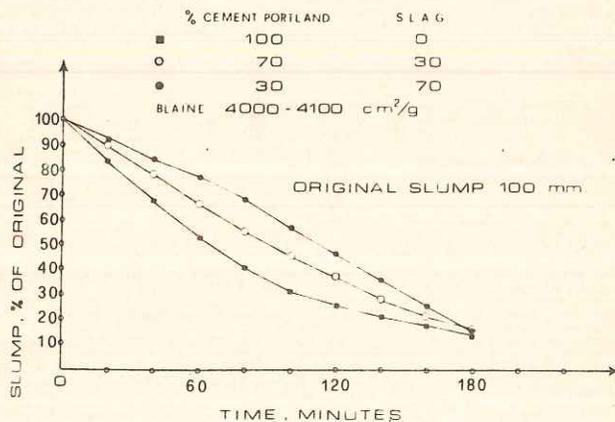
Fig. 3:

Effect of cement type on pore size distribution. Mortar at age of 28 days (11).

tion hydrates at a fairly high rate while the slag fraction hydrates at a low rate and by the more cube-like shape of slag particles, in contrast to the plate-like particles of Portland cement (14). From this, it is seen:

small. The phenomenon is very slight when the cement is more finely ground (7).

- Workability of slag cement concrete is, at the same water-cement ratio, greater of Portland cement concrete. This property appears more pronounced when slag is ground separately, than when it is interground with Portland cement clinker.
- The rate of slump loss of slag cement concretes decreases compared to that of plain Portland cement types, as Fig. 4 shows.



Setting time

The setting times of slag cements, owing to the slow initial rate of hydration, are longer than of plain Portland cements and depend on the slag content, as may be

Fig. 4:

Slump loss of concrete made with different cements.

seen in Fig. 5, where also the influence of the water - cement ratio is to be seen.

The increase of initial 'setting times makes slag cement very attractive in ready mixed concrete (16).

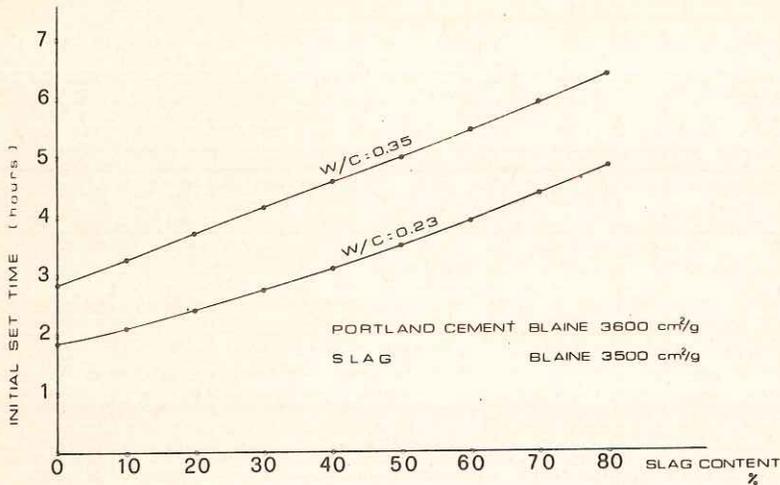


Fig. 5: Initial set time as a function of slag content at different W/C ratio.

Compressive strength

The early compressive strengths developed from clinker Portland-slag mixtures are slower than that of plain Portland cement, while at 7-28 days strengths are equal or higher than that Portland cement. This agrees with the fact that, at the early ages, slag cements have greater porosity and that at long ages, slag cements on the one hand have the same total porosity as Portland cements and on the other a lower proportion of large pores. According to Mindess (17), these large pores determine the values of compressive strength. However, the greater strengths of slag cements also results from the lower C/S ratio in the C-S-H (18).

Since early strength is a symbol of the quality of the cements, this has considered the weakpoint of slag cements. Thus procedures have been developed to accelerate the hydration rate and consequently the compressive strength of slag cements at early ages. These procedures can be subdivided into provisions for cement and provisions for concrete. We will speak about the latter, later. For these concerning cement let us recall:

a) Separate grinding of the Portland cement clinker and granulated slag giving a very high Blaine surface area to the slag fraction. The fineness of the ground slag should be in the order of 5000 Blaine to achieve compressive strengths with 50:50 blends equal to those of Portland cement concrete between 3 and 7 days as shown in Fig. 6 (19). This criterion, adopted in USA, is for commercial reasons, not looked upon favourably in Europe.

b) Optimisation of the gypsum content. In slag cements the optimum gypsum for strengths varies greater with the age (20), and so one needs to choose an average content from the optimum contents at various ages, or optimise the gypsum content on the basis of the age most interesting.

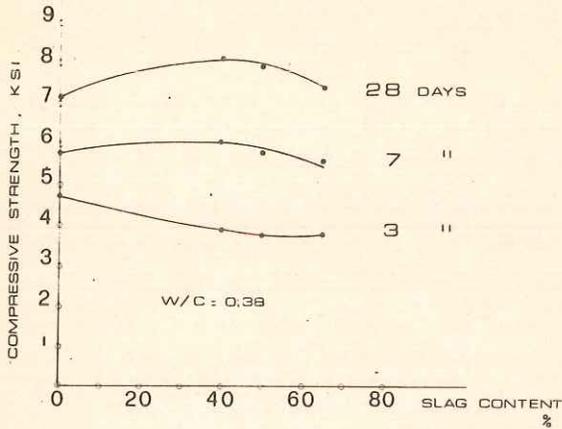


Fig. 6 :

Compressive strength of concretes as a function of slag content. The slag fineness is higher than that of Portland cement (19).

c) Optimisation of the grain size distribution of the components, clinker and slag.

d) Choice of appropriate clinker in relation to the clinker-slag ratio used. In fact, it has

been shown (21) that the compressive strengths of slag cements derive from two factors: on the one hand the contribution of the slag, positively influenced by the presence of alkaline sulphates and on the other that of the Portland cement influenced positively by sulphate alkalis at early ages and negatively at later ages.

It is noted that these last provisions imply a perfect knowledge of the chemical and physical properties of the components and may be preferentially adopted when the Portland-ground slag cement mixing takes place in the cement factory, or when these components are ground together. As can be seen from Fig. 7, with such precautions, even for cements rich in slag, one can obtain early strengths that are comparable to those of pure Portland cement, with the advantage that, for longer ages, the strengths are notably higher.

Moist curing of concrete

Some authors (22) affirm, in general, that concretes with slag cement require longer and more careful curing during the early stages of hardening. This is because owing to the low rate of hydration, a longer time is needed for the originally water-filled space in the fresh cement paste to be filled to the

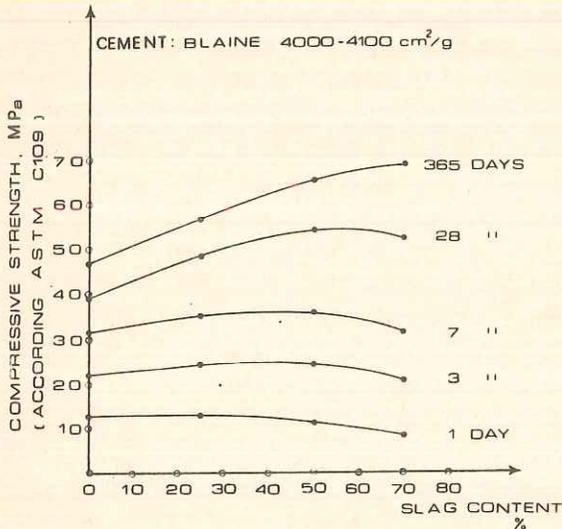


Fig. 7 :

Compressive strength as a function of slag content. Optimisation of all conditions.

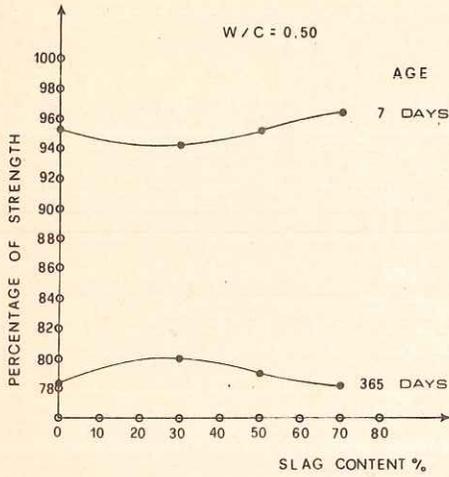


Fig. 8:

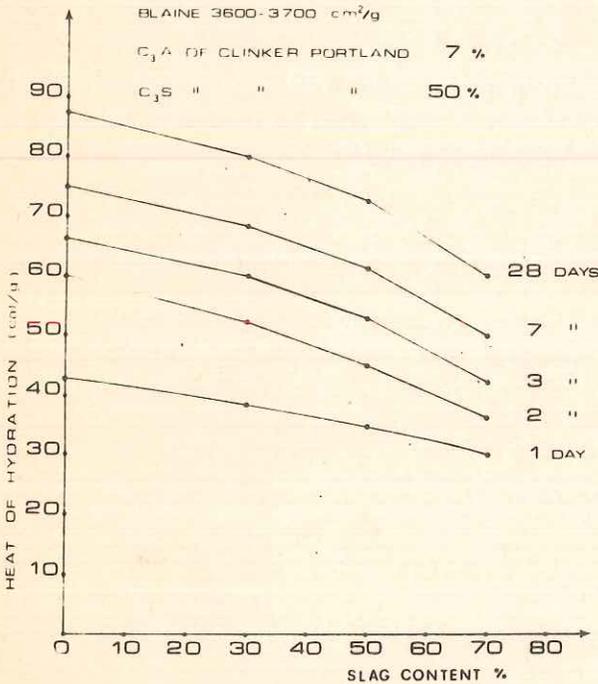
Influence of dry curing on the concrete strength as a proportion of moist curing.

desired extent by the products of hydration of cement. Under appropriate manufacturing conditions of slag cement the influence of moist curing can also be made akin to that for Portland cement. Fig. 8 gives, in function of the slag content in the cement, the compressive strengths of concretes cured continuously in air (50% H.R.) as a percentage of analogous concrete cured at 95% H.R. It is observed that the

decrease in strength following a poor curing is practically independent of the slag content of the cement.

Heat of hydration

The heat of hydration development of slag cements is correlated to hydration rate.



This heat evolution varies with the composition of Portland cement clinker, of granulated slag, with their fineness and with their relative blending proportions. For slag cement with slag smaller 20%, the heat of hydration does not differ essentially from that of pure Portland cement. The very low heat of hydration is a specific property of blast furnace slag cements

Fig. 9:

Heat of hydration as a function of slag content.

with slag greater 60%. It has been pointed out (23) that with slag cements the heat of hydration developed per kg/cm² is less than with cements without addition of slag, i.e. to achieve equal strength values on cements with high (>60%) slag additions less heat is developed. An example of the decrease in heat development of cement with increasing addition of granulated slag, is given in Fig. 9. It is observed that while the variation in the heat of hydration is practically linear at 24 hours, at 7 days an increase in slag content from 0 to 50% lowers the heat of hydration of the cement by 18%, that is by the same value obtained passing from 50 to 70% slag content.

It is also interesting to note the effect of the Blaine fineness of the Portland clinker and of the slag on the heat of hydration. The tests made on a series of four cements included pure Portland cement and three mixtures composed of 70% Portland cement and 30% slag.

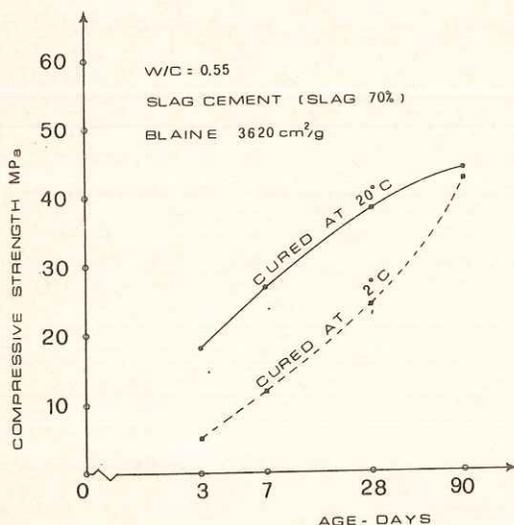
% portland cement	% slag	blaine cm ² /g	heat of hydration cal/g								
			12h	1d	2d	3d	4d	5d	6d	7d	
100	-	3010	34	51	60	63	66	68	70	71	
70 portland cement slag	30	3000	22	44	55	58	61	63	65	66	
		3430									
		2000									
70 portland cement slag	30	3000	20	42	54	58	60	63	65	66	
		3000									
		3000									
70 portland cement slag	30	2990	17	40	52	57	61	63	66	67	
		2600									
		4000									

Table 1:

Effect of Portland clinker and slag fineness on the heat of hydration (24).

The slag was ground to a Blaine fineness of 2000, 3000 and 4000 cm²/g, the fineness of the mixtures always remained equal to 3000 cm²/g. Table 1 shows the results obtained (24). It is noted that there is a slight variation of the heat of hydration in function of the fineness of the clinker up to 1-2 days. Later the effect is no longer significant. It is evident that variations in the fineness of the more active constituent are more manifestly intense than that of the other constituent.

It is noted that there is a slight variation of the heat of hydration in function of the fineness of the clinker up to 1-2 days. Later the effect is no longer significant. It is evident that variations in the fineness of the more active constituent are more manifestly intense than that of the other constituent.



Effect of low curing temperature

The hydration rate of slag cement depends much more on the curing temperature than is so for Portland cement. The hydration of cement with medium or high slag contents is greatly retarded at temperatures of 3-5 °C or below. The tests reported in Fig. 10 are indicative, and even

Fig. 10:

Compressive strengths of concretes made and cured at different temperatures.

if they reflect extreme conditions, they show the notable fall in strength caused by low temperature. One should also note the great recovery of strengths which at 90 days are very close to those for concrete cured under normal conditions.

In circumstances nearer to reality, cements with up 40-50% slag content, behave practically the same as Portland cement. This is confirmed by the values given in Fig. 11, where one sees the variations in initial set times for mixtures having different slag contents, with mix and cure temperatures varied.

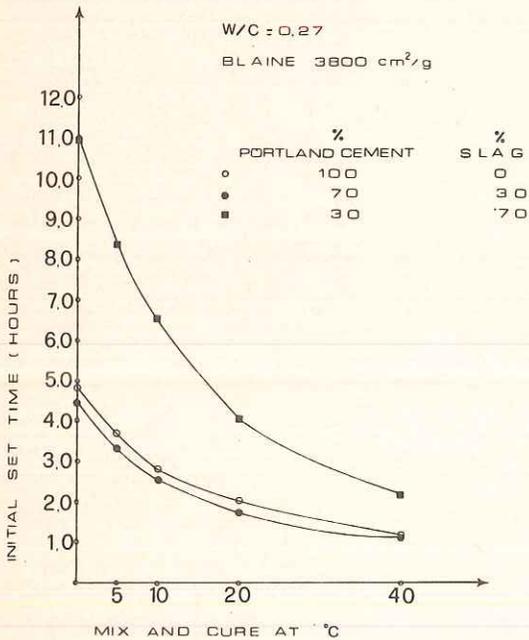


Fig. 11 :

Initial set time of different cements at various temperatures.

Effect of high curing temperature

The sensitivity of slag cement rate of hydration to temperature is due to the notable increase of the rate of hydration, increase that is also favoured by the fact that probably, with the rise in the curing temperature, the critical pore radius of the paste increases (25), thus permitting the growth of nuclei of crystallization.

With temperatures exceeding 20 °C, slag cements show improvement in strength values, compared to Portland cement, at all ages. It

has been found (26), for example, that the ratio between strength at 24 hours with samples made with Portland cement cured at 45 °C and the strength of analogous samples cured at 18 °C is 1.89 against 2.79 of the ratio for a cement containing 70% slag.

The effect of temperature is clear also on the development of the heat of hydration, particularly for cements containing relatively small additions of slag, as may be seen in Table

2 where with increase in curing temperature there is the greatest increase of heat of hydration for cement with 30% slag in respect to pure Portland cement.

Cement Age	portland cement 100% blaine 3500 cm/g		portland cement 70% slag 30% blaine 3600 cm/g	
	20 °C	45 °C	20 °C	45 °C
2 days	36 cal/g	47 cal/g	34 cal/g	50 cal/g
7 days	54	64	51	69
28 days	70	74	69	80

Table 2 :

Effect of cement type on the adiabatic evolution of heat of hydration.

Also under steam-cured condition, slag cements show very favourable strength. The improvement in strength, which can be attained by steam-cured treatment, rise with growing slag content. Besides the ultimate strength of slag cements will be lowered only slightly or not at all in respect to the strengths of cements cured at 20 °C. The effect of the type of cement on the compressive strength of concretes made from pure Portland cement and slag cement with 70 % slag, steam-cured at 80 °C, is shown in Fig. 12. It is noted that the early strengths of the concretes are practically the same while the ultimate strengths of the slag cement are much higher than those for Portland cement.

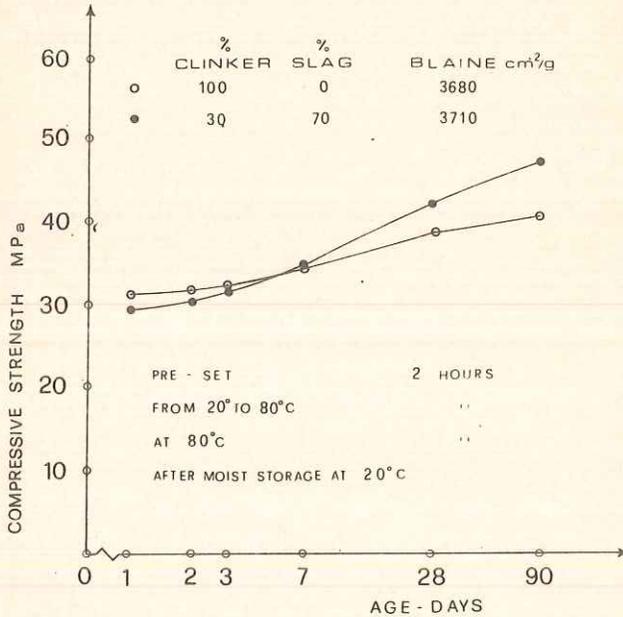


Fig. 12:
Effect of different cements on the compressive strength of steam-cured concrete. Cement content: 300 kg/m³. W/C = 0.58

Behaviour in aggressive environment

Today the resistance of slag cements to attack by seawater, sulphated waters and soils and weakly acidic waters is well known. In the past a great number of laboratory tests - mostly with large size concrete samples - have been carried out to study the behaviour of various cements to attacking waters, particularly sea water in the tidal zone where concrete is subjected to the chemical action of sulphates and Mg⁺⁺ ions, as well as to mechanical action due to expansion caused by crystallization. Among the most significant, we recall a long time study extending over 30 years carried out in Norway. Reinforced concrete piles from nine different cements - among them two slag cements with around 60% slag content and with around 25 % slag content respectively - were exposed upright in the tidal zone. For the main test, cement content was 312 Kg/m³ and W/C ratio about 0.60.

The concrete with slag cement (60% slag) or with cement Type V ASTM showed high stability, while those with Portland cement with 11% C₃A were destroyed. The slag cement (25 %

slag) behaved better than the Portland cement, but not as well as another with 6% C_3A , which attained the durability of the mix with slag cement (60% slag) only when the cement content was raised from 313 to 417 kg/m^3 (27).

In another long-term study carried out by the "Deutscher Ausschuss für Stahlbeton" over 30 years, concrete cubes were exposed in the tidal zone of the North Sea. All concretes with slag cements (50%, 60% and 70% slag respectively), even with a cement content of only 260 kg/m^3 , still remained durable. The Portland cement Type V ASTM and the two slag cements - with 25 and 35% slag - attained a durability comparable to the slag cement, with high content of slag, only at a cement content around 300 kg/m^3 . For the three cement Type I ASTM a content of 350 kg/m^3 was clearly required to obtain the same level (27).

Finally we recall that the "Electricité de France" after testing different types of cement for seven years, chose one with around 70% slag for the building of the "La Ranche" Tidal Power Station, which began operating in 1966. The total surface exposed to sea water is 90,000 m^2 . This building is today still in excellent condition (7) (28).

Slag cement is, in general, considered to be more resistant to the attack of sulphates than ordinary Portland cement. Many researchers (29) (30) (31) (32) have found that low Al_2O_3 slags (Al_2O_3 from 11 to 18 percent) used for making slag cement resulted in better properties for cements produced with them. However, Locher's work (33) has shown that slag cements possess good sulphate resistance if the slag content is more than 60% irrespective of the Al_2O_3 content of the slag or the Portland cement clinker.

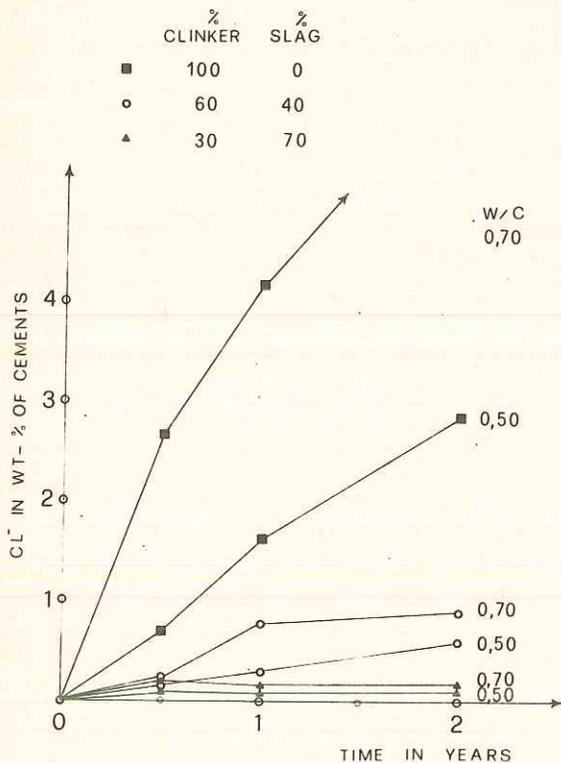
The higher sulphate resistance of slag cement has been confirmed by German cement Specifications (DIN 1164). Under these, slag cements having a minimum slag content of 70% and Portland cements having a maximum of 3% by weight in C_3A are considered resistant to sulphates.

All cements being strongly alkaline, their resistance to attack to acid water and to moor-land water is comparatively low. It is reported that slag cements have shown rather a better performance than Portland cements. The performance improves with the raising of the slag content (34).

There must be some fundamental reason for the good resistance of cement with higher slag content to various solutions aggressive to concrete. Numerous investigators (35) attribute it to the lower content of $Ca(OH)_2$ in the paste so that eventually calcium sulphoaluminate hydrate can form through solution only, and thus does not cause expansion. But this alone cannot explain all the differences in behaviour. Today one can hypothesize that the greater durability of slag cements to given chemical reactions is largely attributable to the lower permeability of cement paste, so that, for example, sulphate ions cannot really infiltrate into it, thus eliminating the formation of any supplementary ettringite, in spite of high alumina content of the slag (36). It is worth noting that the permeability of a cement paste is governed by the volume of large pores present. Also lower $Ca(OH)_2$ contents are associated with high permeability. The reduction in the porosity and pore size of the hydrates could be much increased by increasing slag fineness (about 5000 cm^2/g Blaine).

Diffusion of chloride ions

Concretes made with slag cement present a low rate of chloride diffusion from environment, as is verified in constructions in contact with seawater or in roads subjected to deicer salts containing chloride. Penetration of chloride into the concrete may cause corrosion of reinforcing steel and spalling of the concrete (37). The rates of chloride diffusion is dependent upon the water-cement ratio and, to a greater extent, by the type of cement, as may be seen in Fig. 13 (12), where percentages of chloride by weight of cement are shown as functions of the duration of exposure. It appears that the diffusion of chloride ions into concrete is



dependent not only on ion-exchange between the permeating solution and the pore solution present in concrete, but also on the diffusivities of chloride ions in the cement paste and concrete (38), where the effective diffusivities of chloride ions for pastes made from slag cement (65% slag) are an order of magnitude lower than for plain Portland cement: 4.1×10^{-9} against $44.7 \times 10^{-9} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ at an age of 60 days and $W/C = 0.50$ (39).

Fig. 13:
Penetration of chloride ions into concrete specimens at depth of 2-4 cm. NaCl solution 3 mg/l (12).

Freezing durability

According to Pigeon and Regourd (11), the pore size distribution can serve as basis for the explanation of the good freeze-thaw durability of the slag cements.

Slag cement paste have much finer pores than Portland cement paste and water in smaller pores becomes unstable at lower temperatures and therefore at normal freezing temperatures (0°C to -20°C) in slag cement paste less water will become unstable than in Portland cement paste. It is also possible that hydrated slag cement pastes which appear to be very uniform have fewer weak zones where microcracks can initiate (11).

The use of slag cement requires higher dosage of the agent when a certain air content is to be reached (40).

Alkali-aggregate reactivity

A partial replacement of the Portland cement by granulated blast furnace slag was also found to be effective in reducing expansions due to alkali-silice reactions. The effect of slag blend on potential alkali-aggregate reactivity was tested by ASTM C227 using Pyrex glass as reactive aggregate. The results shown in Fig. 14 (41) indicate a considerable reduction in the expansion of mortar bar specimens when the blends were used.

At the beginning of the 1970s, an investigation was carried out in Germany (42), to

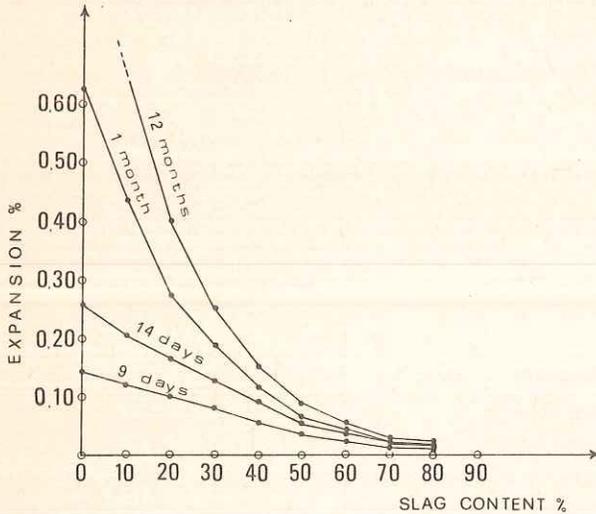


Fig. 14 :

Influence of the slag content on the alkali-aggregate reaction. Na_2O equivalent of the clinker Portland was 1.26 % (41).

specific the maximum alkali content for cements to be used with stone materials of potential alkaline reactivity. More precisely, as a precautionary measure it was indicated that if the slag

content in the cement is at least 50%, the alkali content in the latter must be lower than or equal to 90% equivalent sodium oxide; while if the slag content exceeded 65%, the equivalent sodium oxide content in the cement may be up to 2.0%. Recently, it has been confirmed (43) that, in spite of high alkali contents, cement with 70% slag show excellent resistance to alkali aggregate reaction, and the alkali content in the clinker does not influence the degree of expansion.

The mechanism which allows concretes made with slag cement not to give rise to alkali-aggregate expansion, is due to a lower ionic diffusivity and permeability than equivalent Portland cement concretes (44). It has been proposed (6) that the slag cement paste is resistant towards alkali-aggregate reactions because of the combined effect of physical fine structure and the chemical binding of release alkalis from Portland cement fraction in the C-S-H phases.

Cracking tendency

The use of high slag cement reduces the cracking tendency through an interplay of effects on hardening, shrinkage and creep. Practically slag cement concrete shows the same shrinkage and creep as plain Portland cement concrete. Because of the lower initial hardening, it may allow more shrinkage to be accommodated in the form of plastic shrinkage and therefore reduce cracking (45). Also the highest flexural strengths play a favourable rôle.

Conclusion

In the light of what has been shown above one may state that the behaviour of slag cements is governed by the quantity of slag they contain. This negatively affects the rate of hydration and positively influences the pore size distribution of the paste.

Wherever, therefore, appropriate provisions are made (greater grinding fineness and optimization of the cement manufacturing parameters or the curing of the concrete at higher temperature) the rate of hydration can be increased to values close to that for Portland cement while maintaining the positive effects of the pore size distribution and all the consequences deriving from such engineering characteristics.

In such conditions slag cements are to be preferred to Portland cements not only in constructions where cements are required:

- with high resistance to attack of sulphate, sea water or acid water,
- with low alkali,
- with low heat of hydration,
- with high ultimate strengths,
- for ready mixed concrete,
- for steam-cured concrete,
- for paving stones, floors, roads,

but in any kind of concrete and reinforced concrete constructions without restriction though certain precautions are necessary:

- when concreting in cold weather (insulating shuttering, reheating of concrete, protecting the surface, use of admixture) (22),
- eventually, in order to avoid premature drying out, especially in the case of sections with a higher surface/volume ratio (spraying the surface for one-two days, maintaining the humidity by covering with mats watered at regular intervals, spraying on a curing admixture) (22).

References

1. R. Sersale, P.G. Orsini, *Ricerca Scientifica*, 30, 1230 (1960).
2. T.C. Powers, "The Physical Structure of Portland Cement Paste" in: *The Chemistry of Cements*, Ed. H.F.W. Taylor, Vol. I, Accademic Press, London (1964) p. 393.
3. G. Frigione, R. Sersale, *Il Cemento*, 80, 15 (1983).
4. G. Frigione, "Gypsum in Cement", in *Advances in Cement Technology*. Ed. S.N. Ghosh, Pergamon Press, Oxford (1983) p. 519.
5. M. Regourd, H. Hornain, B. Mortureux, *Revue des Materiaux de Construction*, N° 699, 83 (1976).
6. D.M. Roy and G.M. Idorn, *A C I Journal*, 79, 444 (1982).
7. M. Regourd, 7th Int. Congr. Chem. Cem., Paris, Principal Report, Vol. I, III-2/9 (1980).
8. I. Odler, J. Hagymassy, E. Bodor, *Cement Concrete Research*, 2, 577 (1980).
9. R. Kondo, S. Ohsawa, 5th Int. Symp. Chem. Cem., Tokyo, Vol. IV, 255 (1969).

10. C. Cesareni, G. Frigione, *Industr. Ital. Cemento*, XXXVI, 3 (1966).
11. M. Pigeon, M. Regourd, "Freezing and thawing durability of three cements with various granulated blast furnace slag contents" in: *Fly Ash, Silica Fume, Slag and Other Mineral By-Products in Concrete*, Vol. II, Publication SP-79 ACI, Detroit, (1983).
12. H.G. Smolczyk, 7th Int. Cong. Chem. Cem., Paris, Principal Report, Vol. I, III-1/3 (1980).
13. F.S. Rostasy, R. Weiss, G. Wiedemann, *Cement Concrete Research*, 2, 577 (1980).
14. A. Thomas, IEEE Cement Industry Technical Conference, Innisbrook, Florida, USA, May (1979).
15. C. Cesareni, G. Frigione, 5th Int. Symp. Chem. Cem., Tokyo, Vol. IV, 237 (1969).
16. H.G. Smolczyk, *Revue de Metallurgie*, May, 275 (1978).
17. S. Mindess, *J. Am. Cer. Soc.*, 53, 621 (1970).
18. G. Frigione, A. Nastro, *Il Cemento*, 81, N° 2, (1984).
19. L. Spellman, Slag Cement Sem., Univ. Alabama, Birmingham, USA, Apr. (1981).
20. G. Frigione, R. Sersale, *Am. Cer. Soc. Bull.* 62, 1275 (1983).
21. G. Frigione, R. Sersale, *Cement Concrete Research* (in press).
22. M. Venuat, *Moniteur des Travaux Publics et du Bâtiment*, 69, 65 (1972).
23. H. Lehmann, W. Roesky, *Tonind. Ztg* 89, 337 (1965).
24. R. Alègre, *Revue des Matériaux de Construction*, N. 546, 181 (1961).
25. D.M. Roy, K.M. Parker, "Microstructures and Properties of Granulated Slag-Portland Cement Blends at Normal and Elevated Temperatures" in: *Fly Ash, Silica Fume, Slag and Other Mineral By-Products in Concrete*, Vol. II, Publication SP-79 ACI, Detroit, (1983) p 397.
26. C. Couillaud, *Circ. Serie F*, N° 31 (1947) *Inst. Tech. Bat. Trav. Pub.*, Paris.
27. H.G. Smolczyk, 5th Int. Symp. Chem. Cem., Tokyo, Vol. IV, 149 (1969).
28. R. Peltier, *Revue des Matériaux de Construction*, N. 680, 31 (1973).
29. R.W. Nurse, "Slag Cements" in: *The Chemistry of Cements*, Ed. H.F.W. Taylor, Vol. 2, Academic Press, London (1964).
30. R. Kondo, 4th Int. Symp. Chem. Cem., Washington, Vol. II, 881 (1960).
31. J.H.P. Van Aardt, S. Visser, *Nat. Build; Res. Inst. Bull.* 47 C SIR Rept 254 (1967).
32. H. Miyairi, R. Furukawa, K. Saito, 29th Gen. Mtg Cem. Ass. Japan Tokyo (1975) p 73.
33. F.W. Locher, *Zement-Kalk-Gips*, 55, 395 (1966).
34. F. Parissi, P. Barone, G. Frigione, *Industr. Ital. Cemento*, XXXIV, 159 (1964).
35. G. Frigione, R. Marotta, *Giornale Genio Civile*, Fascicoli 7°-8°-9°, 311 (1975).
36. C.A. Taneja, *Zement-Kalk-Gips*, 64, 70 (1975).
37. B. Ost, G.E. Monfore, *Journal of PCA*, 8, 46 (1966).
38. M. Colleparidi, A. Marcialis, R. Turriziani, *J. Am. Cer. Soc.*, 55, 534 (1972).
39. N.R. Short, C.L. Page, *Silicates Industriels*, XLVII, 237 (1982).
40. J. Virtanen, "Freeze-Thaw Resistance of Concrete Containing Blast-Furnace Slag, Fly Ash or Condensed Silica Fume" in: *Fly Ash, Silica Fume, Slag and Other Mineral By-Products in Concrete*, Vol. II, Publication SP-79 ACI, Detroit, (1983).
41. G. Frigione, R. Marotta, *World Cement Technology*, 12, 73 (1981).

42. H.G. Smolczyk, 6 th Int. Cong. Chem. Cem., Moscow, III, III - 2 (1974).
43. A. Cattaneo, G. Frigione, Cement Concrete and Aggregates, 5, 42 (1983).
44. R.F.M. Bakker, Ciments Betons Platres Chaux, N. 734, 49 (1982).
45. A.M. Neville, Properties of Concrete, Pitman Publishing, London (1975) p 336.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, R. Sersale, L. Mangoni.

* Ricerca effettuata con fondi erogati dal Ministero della Pubblica Istruzione.

I N D I C E

Scienze Chimiche

A. Bolognese, R. Maglione - Decomposizione fotochimica degli N-Ossidi della Trifenodiossazina	Pag. 27
A. Bolognese, R. Liberatore, C. Piscitelli, G. Scherillo, U. Vettori - Struttura e proprietà degli Ommocromi. Ossidazione dell'estere metilico della 3-idrossichinureina	" 31
G. Frigione - Utilizzazione di loppa d'altoforno per la produzione di Clinker Portland	" 49
C.F. Xaasan, L. Minale, M. Bashir, M. Hussein, E. Finamore - Triterpenes of Boswellia Carterii	" 93
G. Frigione - Properties of Portland Slag Cements	" 129

Scienze Matematiche

G. Montagnaro - Su un sistema di equazioni integrali che traduce un problema di frontiera mobile a due fasi	" 15
A. Basile - Su un teorema di decomposizione alla Lebesgue per topologie su anelli di insiemi	" 61
L. D'Apuzzo - Sulla questione della attrazione negli spazi metrici	" 81
M.A. Puglisi - Misurabilità e spazi-KD di funzioni vettoriali	" 97
V. Esposito - Su alcune equazioni ellittico paraboliche de generi del IV ordine	" 117

Scienze Biologiche

A. Polzonetti-Magni, L. Bellini-Cardellini, A. Gobetti, V. Botte - Ormoni sessuali plasmatici nell'anfibio anuro, <u>Rana Esculenta</u> complex, in accoppiamento	" 9
G. Chieffi, M.F. Caliendo, M. Milone - Modificazioni della malato deidrogenasi nell'ipotalamo di topo durante lo sviluppo	" 37
G. Chieffi, M.F. Caliendo - Profilo ontogenetico della glucosio-6-fosfato deidrogenasi nell'ipotalamo di topo	" 67

